

Physik-Abteilung

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren
Fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,
G. und E. Wiedemann, P. Drude,
W. Wien, M. Planck, E. Grüneisen

Der ganzen Reihe 448. Band

Kuratorium:

W. GERLACH, CHR. GERTHSEN, F. HUND, W. KOSSEL,
M. v. LAUE, W. MEISSNER, R. W. POHL, R. ROMPE,
R. SEELIGER, W. WEIZEL

Herausgegeben von

H. KOPFERMANN
Heidelberg

F. MÖGLICH
Berlin



JOHANN AMBROSIUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Inhalt

	Seite
G. B. Hagen, Berlin-Adlershof: Über die Konstruktion von Elektronenbahnen in Potentialfeldern. (Mit 13 Abbildungen)	257
H. Wagenbreth, Berlin: Zur Dublettaufspaltung von Alkalitermen. (Mit 1 Abbildung)	265
B. Elschner, Jena: Beitrag zur Erweiterung der Kenntnis der Elementarvorgänge der Magnetisierung in Eisen-Silicium-Kristallen. (Mit 13 Abbildungen)	290
W. Muscheid, Berlin-Buch: Über den Einfluß von Sauerstoff auf die Leitfähigkeit von CdS-Einkristallen. (Mit 15 Abbildungen)	305
W. Muscheid, Berlin-Buch: Zum Nachweis von Haftstellen in CdS-Einkristallen. (Mit 7 Abbildungen)	322
W.-H. Isay, Berlin-Buch: Beitrag zur Leitfähigkeitstheorie der Halbleiter. (Mit 5 Abbildungen)	327
H. Diedrich, Berlin-Buch: Halleffekt-Messungen an CdS-Kristallen. (Mit 2 Abbildungen)	349
S. Parthasarathy, H. Singh and M. Pancholy, New Delhi: Damped Oscillations of a Quartz Crystal in Liquids at Different Temperatures. (With 10 figures)	353
K. Krebs und A. Sauer, Berlin: Über die Intensitätsverteilung von Spektrallinien im Pérot-Fabry-Interferometer. (Mit 4 Abbildungen)	359
G. P. Weber, Jena: Zur zweiten störungstheoretischen Näherung der Meson-Nukleon-Streuung. (Mit 4 Abbildungen)	369
H. Chr. Wolf, München: Gitterquell-Interferenzen harter Röntgen-Bremsstrahlung. (Mit 13 Abbildungen)	381
B. Schumacher, Hechingen und Stuttgart: Abbildung von Gasströmungen mit Elektronenstrahlen. (Mit 15 Abbildungen)	404
G. Schulz, Berlin-Adlershof: Zweistralinterferenzen: Über Interferenzprinzipien und den Ort der Interferenzerscheinung. (Mit 6 Abbildungen)	421

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechts der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn Prof. Dr. F. Möglich, (1) Berlin-Buch, Lindenberger Weg 74, oder an Herrn Prof. Dr. H. Kopfermann, Heidelberg, Albert-Ueberle-Straße 7, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte *druckfertig* einzuliefern und in den Korrekturen den bisherigen Raum des Textes nicht zu überschreiten. Die *Zeichnungen* sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Bei den *Zitaten* wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, das jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

Die Zeitschrift erscheint in Bänden mit 8 Heften, die zwanglos ausgegeben werden. Die Lieferung erfolgt durch den Sortimentsbuchhandel, in Ausnahmefällen unmittelbar vom Verlag. Der Bezugspreis beträgt je Band DM 34.— (U. S. \$ 8.16) zuzügl. Postgebühren. Einzelpreis dieses Heftes DM 15.60 (U. S. \$ 3.75).

Die Lieferung erfolgt bis zur Abbestellung, die nur für das Ende eines Bandes ausgesprochen werden kann.

Über die Konstruktion von Elektronenbahnen in Potentialfeldern

Von G. B. Hagen

(Mit 13 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Es wird die Genauigkeit der graphischen Konstruktion von Elektronenbahnen in Potentialfeldern untersucht. Der Untersuchung werden unterworfen:

Die Konstruktionsweise, deren Grundlage das Snelliussche Brechungsgesetz bildet, und die Konstruktionsweise, welche auf dem momentanen Krümmungsradius beruht. Es wird untersucht, unter welchen Einfallswinkeln, unter welchen Verhältnissen von der Eintritts- zur Austrittsgeschwindigkeit des Elektrons und unter welchen Neigungswinkeln der Potentiallinien Fehler zu erwarten sind, die die allgemeine Zeichengenauigkeit nicht überschreiten. Hierfür werden zahlenmäßig Daten angegeben; das Ergebnis zeigt weiter, daß die Konstruktion, bei der der momentane Krümmungsradius bestimmt wird, für von Hand aus zu zeichnende Elektronenbahnen keinen Vorteil bringt.

§ 1. Einleitung

Beim Entwurf elektronen-optischer Systeme bedient man sich der Auswertung von Modellversuchen, die in einem elektrolytischen Trog angestellt werden. Der elektrolytische Trog führt im stationären Betrieb $\left[\text{Operator } \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \right]$ wegen des Verschwindens der zweiten Maxwell-Gleichung

$$\text{rot } \mathfrak{E} = -\mu \mu_0 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

für elektrische Feldstärke und Strom auf Potentialfunktionen

$$\mathfrak{E} = -\text{grad } \Phi.$$

Dabei ist das Potentialfeld in Raumelementen, die die Elektroden nicht umschließen, divergenzfrei, so daß gilt:

$$-\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \text{div } \mathfrak{E} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \Delta \Phi = 0.$$

Ordnet man daher die Elektroden des elektrolytischen Troges in einer solchen Konfiguration an, wie sie den Elektroden einer bestimmten Vakuumröhre gleichkommt, so entspricht das Feld, das man durch Sondenmessung im Trog aufzuzeichnen imstande ist, dem sich in der Elektronenröhre ergebenden Felde. Zu beachten dabei ist, daß diese Analogie nur soweit besteht, als, entsprechend der

Bedingung der Divergenzfreiheit $\Delta\Phi = 0$, Raumladungsfreiheit der Röhre gewährleistet ist.

Die für die Praxis eigentlich interessierende Frage ist jedoch die der Elektronenbewegung in dem Potentialfeld. Diese Frage ist mit einfachen analytischen Mitteln nur in wenigen Einzelfällen¹⁾ zu beantworten.

Im allgemeinen muß man, um zu einer Bestimmung der Elektronenbahnen zu gelangen, auf graphische Methoden zurückgreifen. Die am meisten angewendete Methode läuft auf das Snelliussche Brechungsgesetz hinaus²⁾).

Es soll im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden, unter welchen Voraussetzungen man hinreichend genau graphisch die Elektronenbahnen bestimmen kann.

§ 2. Elektronenbahnen in Potentialfeldern

Ein sich auf einer Kreisbahn von Radius ϱ bewegendes Körper der Masse m steht unter dem Einfluß einer Zentrifugalkraft

$$Z = \frac{m \cdot v^2}{\varrho}.$$

Umgekehrt wird ein Massenkörper m der Geschwindigkeit v durch eine in jedem Augenblick normal zu seiner Bahnrichtung wirkende Kraft Z auf eine Kreisbahn vom Radius ϱ gezwungen. Diese Verhältnisse gelten auch für ein sich in einem Potentialfeld bewegendes Elektron. Besitzt das Elektron die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m}(V + V_{\text{ant}})},$$

so wird es durch die normal zu seiner Bewegungsrichtung wirkende Kraftkomponente des Potentialfelds Φ

$$e \operatorname{grad}_{\perp} \Phi = e \operatorname{grad}_{\perp} V$$

auf eine Kreisbahn gezwungen, deren Radius ϱ bestimmt ist durch

$$\varrho = \frac{2 \cdot (V + V_{\text{ant}})}{\operatorname{grad}_{\perp} V}. \quad (2.01)$$

Hierbei bedeutet V die am betrachteten Punkt herrschende Spannung und $e \cdot V_{\text{ant}}$ die kinetische Energie, die das Elektron am Orte der Spannung Null besaß. Unter Benutzung von Gl. (2.01) ergibt sich daher die Möglichkeit, in jedem Punkt des Feldes bei vorgegebener Bahnrichtung und Geschwindigkeit des Elektrons eine kreisförmige Fortsetzung zu zeichnen³⁾. Voraussetzung dabei ist,

¹⁾ So lassen sich z. Z. die Bewegungsgleichungen lösen für die zweidimensionalen Potentialfelder

$$\Phi = ax$$

$$\Phi = axy \text{ sowie das dreidimensionale Feld}$$

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

²⁾ W. Graffunder, Bull. schweiz. elektrotechn. Ver. 38 Nr. 4, 79–82 (1947). Ein einfaches Zeichengerät zur Konstruktion der Elektronenbahnen im Potentialfeld.

³⁾ Sándor, Arch. Elektrotechn. 25, 353 (1941), Einfache Konstruktionsvorrichtung für Trägerbahnen im elektrischen Potentialfeld.

⁴⁾ Karl R. Spangenberg, Vacuum Tubes. New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., insbes. S. 107 u. S. 121.

⁵⁾ Salinger, Electronics 10, 50–54 (1937).

daß die Bahnabschnitte, die man in dieser Weise zusammensetzt, so klein sind, daß man in jedem Abschnitt mit einer konstanten Geschwindigkeit v rechnen kann. Beim praktischen Zeichnen von Elektronenbahnen wird man jedoch im allgemeinen auf Schwierigkeiten stoßen, wenn man die Bahnen aus dem momentanen Krümmungsradius konstruieren will. Denn der Krümmungsradius kann beliebig große Werte annehmen, so daß eine Konstruktion mit Hilfe des Zirkels sich verbietet. Kreise, die einen größeren Krümmungsradius besitzen, lassen sich mit Hilfe eines

durch ein Lenkrad gesteuerten Zeichenwägelchens konstruieren. Solche Anordnungen hat man als halbautomatische, ja auch als vollautomatische Zeichengeräte für Elektronenbahnen entwickelt. Es bedingen jedoch in jedem Fall die genannten Konstruktionen erheblichen mechanischen Aufwand⁴⁾). In einem Potentialfeld mit parallelen, nicht gekrümmten Äquipotentiallinien erfährt zwischen zwei Potentiallinien des Potentials V_1 und V_2 das Elektron eine Ablenkung seiner Bahnrichtung, wie es dem Snelliusschen Brechungsgesetz entspricht. Es ergibt sich also zwischen dem Winkel α , unter dem das Elektron mit der Elektronenvolt-Geschwindigkeit $V_1 + V_{\text{anf}}$ in die Äquipotentiallinie I eintritt, und dem Winkel β , unter dem es die Äquipotentiallinie II mit der Geschwindigkeit $V_2 + V_{\text{anf}}$ wieder verläßt, die Beziehung

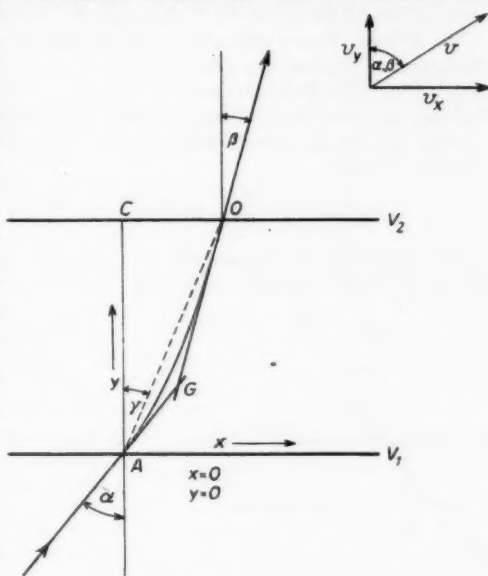


Abb. 1. Elektronenbrechung an parallelen Äquipotentiallinien

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{V_1 + V_{\text{anf}}}{V_2 + V_{\text{anf}}}} \quad (2.02)$$

α und β sind beide gegen die Normale zu den Äquipotentiallinien gerechnet. Diese Beziehung ergibt sich, wenn man lediglich berücksichtigt, daß unter der gemachten Voraussetzung nur die zu den Potentiallinien senkrechte Geschwindigkeitskomponente v_x durch das Feld beeinflusst wird, die den Potentiallinien parallele Komponente v_x aber nicht. So muß gelten (vgl. Abb. 1)

$$\frac{m}{2}(v_x^2 + v_{y1}^2) = e(V_1 + V_{\text{anf}})$$

$$\frac{m}{2}(v_x^2 + v_{y2}^2) = e(V_2 + V_{\text{anf}}),$$

⁴⁾ Langmuir, Nature **139**, 106 (1937).

⁵⁾ D. Gabor, Nature **139**, 373 (1937).

somit

$$\frac{V_1 + V_{\text{ant}}}{V_2 + V_{\text{ant}}} = \frac{1 + \left(\frac{v_{y1}}{v_x}\right)^2}{1 + \left(\frac{v_{y2}}{v_x}\right)^2} = \frac{1 + \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \beta} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha}.$$

Der Weg AD zwischen den Potentiallinien ist parabelförmig; es gibt Gl. (2.02) Eintritts- und Austrittswinkel exakt wieder. Der Ort D des Austritts aus der Potentiallinie II ist durch Gl. (2.02) zunächst unbestimmt gelassen.

Die übliche Konstruktionsweise läuft darauf hinaus, den Schnittpunkt G zwischen eintretendem und austretendem Strahl in die Mitte zwischen die beiden betrachteten Äquipotentiallinien zu verlegen. Man verfährt nämlich so, daß die Brechung an einer Potentiallinie unter Zugrundelegen der mittleren Potentiale zwischen den beiden benachbarten Linien errechnet wird, vgl. Abb. 2. Die errechneten Winkel

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{V'' + V''' + 2 V_{\text{ant}}}{V' + V'' + 2 V_{\text{ant}}}} \quad (2.03)$$

ergeben dann an den punktiert gezeichneten Mittellinien $\frac{1}{2}(V' + V'')$ und $\frac{1}{2}(V'' + V''')$ die richtigen Neigungen; auch liegen in Näherung die Punkte P und P' auf den Mittellinien in richtiger seitlicher Lage zueinander, worauf noch zurückgekommen wird.

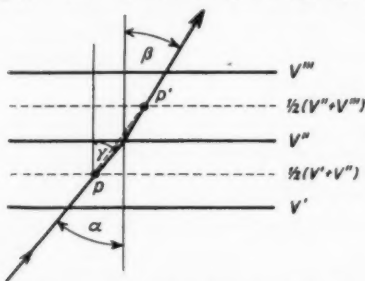


Abb. 2. Elektronenbrechung an parallelen Äquipotentiallinien unter Berücksichtigung der Zwischenpotentiale

Die praktische Ausführung der Winkelkonstruktion nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz ist an verschiedenen Stellen behandelt und es sind auch Hinweise für einfache zeichnerische Hilfsmittel der Konstruktion angegeben worden. Die einfache Konstruktionsmöglichkeit der Strahlenbrechung läßt es wünschenswert erscheinen, die Berechnung der Elektronenbahnen auf das Snelliussche Brechungsgesetz abzustellen. Es ergibt

sich also die Frage, unter welchen Bedingungen und mit welcher Genauigkeit eine solche Konstruktion zuverlässig ist, selbst wenn die Voraussetzung paralleler Äquipotentiallinien nicht mehr erfüllt ist.

§ 3. Konstruktion der Bahnkrümmung und Brechung

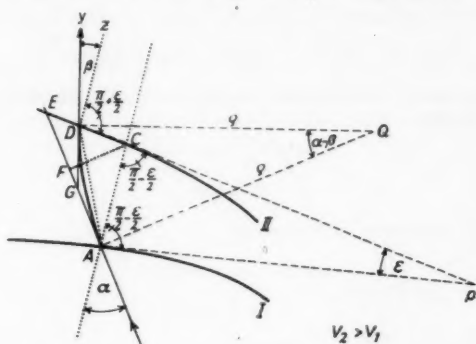
Der Zusammenhang zwischen der für den Krümmungsradius maßgeblichen Gl. (2.01) und dem Snelliusschen Brechungsgesetz (2.02) ergibt sich auf Grund einer geometrischen Betrachtung, bei der jedoch der Begriff des Feldgradienten besonders zu beachten ist.

Angenommen, man hat es mit zwei Äquipotentiallinien I und II mit dem Potentialunterschied ΔV zu tun, vgl. Abb. 3, welche näherungsweise gerade Linien sind und sich verlängert unter einem Winkel schneiden würden. Es sind also die Orthogonaltrajektorien konzentrische Kreise. Es soll jedoch näherungsweise für den zu betrachtenden Punkt A der Gradient durch den Potential-Unter-

schied pro Länge der Symmetrienormalen AC berechnet werden:

$$\text{grad } \Phi = \frac{\Delta V}{AC}. \quad (3.01)$$

Ein Elektron, welches mit der Geschwindigkeit $V_1 + V_{\text{ant}}$ unter einem Winkel α gegen die Symmetrienormale AC die Äquipotentiallinie I schneidet, beschreibt dann einen Kreis mit einem Krümmungsradius ϱ . Der Radius ϱ ist bestimmt durch



$$\sphericalangle EAC = \alpha$$

$$\sphericalangle EGD = \alpha - \beta$$

$$\sphericalangle CAD = \alpha - \sphericalangle EAD$$

$$\sphericalangle GDA = \sphericalangle EAD = \frac{1}{2}(\pi - \sphericalangle AGD)$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[\pi - (\pi - \sphericalangle EGD)]$$

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle GDC - GDA$$

$$= \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta + \epsilon}{2}$$

$$\sphericalangle ACD = \frac{\pi}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\sphericalangle GDC = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} - \beta$$

Abb. 3. Elektronenbrechung an nicht-parallelen Äquipotentiallinien; Eintritt von der Seite der Konvergenz der Potentiallinien

die mittlere Volt-Geschwindigkeit des Elektrons zwischen den Äquipotentiallinien I und II einerseits und durch die aus (3.01) zu berechnende normale Komponente des Feld-Gradienten andererseits. [Projektion des Gradienten in Richtung der Senkrechten FC auf die verlängerte Bahnrichtung AE .] So ergibt sich daher für den Krümmungsradius die Bestimmungsgleichung, indem man (2.01) benutzt

(3.02)

$$\varrho = \frac{2(V_1 + V_{\text{ant}} + \frac{\Delta V}{2})}{\text{grad } V} = \frac{2(V_1 + V_{\text{ant}} + \frac{\Delta V}{2})}{\Delta V} \frac{AC}{\sin \sphericalangle EAD} = \frac{2(V_1 + V_{\text{ant}} + \frac{\Delta V}{2})AD}{\Delta V \cdot \sin \alpha}.$$

Das Elektron verläßt nun die Äquipotentiallinie II unter einem Winkel β gegen die in D errichtete Parallele DZ zur Symmetrienormalen AC . Aus dem Dreieck ADQ ersieht man, daß

$$\varrho = \frac{AD}{2 \sin \sphericalangle AQD} = \frac{AD}{2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2}} \quad (3.03)$$

ist. Das Verhältnis zwischen den Strecken AC und AD erhält man gemäß den in Abb. 3 angegebenen Winkelbeziehungen zu

$$\frac{AC}{AD} = \frac{\sin \angle ADC}{\sin \angle ACD} = \frac{\sin \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta + \varepsilon}{2} \right]}{\sin \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right]} = \frac{\cos \frac{\alpha + \beta + \varepsilon}{2}}{\cos \frac{\varepsilon}{2}}. \quad (3.04)$$

Nun sei zur Abkürzung die Beziehung eingeführt:

$$\frac{V_2 - V_1}{V_2 + V_1 + 2 V_{\text{ant}}} = \frac{\Delta V}{2(V_1 + V_{\text{ant}} + \frac{\Delta V}{2})} = \psi. \quad (3.05)$$

Man erhält dann durch Gleichsetzen von Gl. (3.02) und Gl. (3.03) unter Berücksichtigung von (3.04)

$$\psi = \frac{2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta + \varepsilon}{2}}{\sin \alpha \cdot \cos \frac{\varepsilon}{2}} \quad (3.06)$$

und durch trigonometrische Umformung:

$$\psi = \frac{\sin \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \sin \left(\beta + \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\cos \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sin \alpha}$$

was nach β aufgelöst ergibt:

$$\sin \left(\beta + \frac{\varepsilon}{2} \right) = \sin \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \psi \cdot \cos \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sin \alpha. \quad (3.07)$$

Im Falle paralleler Äquipotentiallinien, d. h. also $\varepsilon = 0$, geht übrigens Gl. (3.06) über in

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 1 - \psi. \quad (3.08)$$

Es wurde bereits als Voraussetzung für eine Krümmungsradius-Konstruktion festgestellt, daß die Geschwindigkeit im betrachteten Intervall sich nicht wesentlich ändern darf. Es muß als $\psi \ll 1$ sein, so daß man aus Gl. (3.08) erhält:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{1}{1 + \psi} = \sqrt{\frac{1}{1 + 2\psi}} = \sqrt{\frac{V_1 + V_{\text{ant}} + \frac{\Delta V}{2}}{V_1 + V_{\text{ant}} + \frac{\Delta V}{2} + \Delta V}}. \quad (3.09)$$

Gl. (3.08) entspricht dem Snelliusschen Brechungsgesetz (vgl. (2.03)) bezogen auf die zu der Äquipotentiallinie II gehörigen Mittenpotentiale

$$V_1 + V_{\text{ant}} + \frac{\Delta V}{2} \text{ und } V_1 + V_{\text{ant}} + \frac{3\Delta V}{2}.$$

Es ist jedoch zu beachten, daß auch hier zunächst der Punkt D , in welchem der Austritt aus der Äquipotentiallinie II erfolgt, durch Gl. (3.06) unbestimmt gelassen ist. Nun muß das Dreieck AGD ein gleichschenkeliges Dreieck sein, denn es sind ja die Strecken AE und GD Tangenten zu dem im Punkte Q konstruierten Krümmungskreis. Ist daher durch (3.06) der Ablenkungswinkel $\alpha - \beta$ des Elektronenstrahles konstruierbar, so gilt für den Winkel $\angle EAD = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Der Winkel, gegen die Symmetrienormale gemessen, unter dem der Austrittspunkt D im Eintrittspunkt A erscheint ($\angle CAD$) beträgt dann

$$\gamma = \angle CAD = \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (3.10)$$

Das bedeutet, daß der Punkt D durch einfache Konstruktion zu gewinnen ist, wenn man aus Gl. (3.06) den Austrittswinkel berechnet hat.

Weiter ist der Fall zu behandeln, bei dem das Elektron im Gegensatz zu der Darstellung in Abb. 3 von der Seite der Divergenz der Äquipotentiallinien anläuft, wie es Abb. 4 zeigt. Die konstruktiven Verhältnisse der Abb. 3 erfahren dann nur in soweit eine Änderung, als die Winkel zwischen Symmetrienormalen und Äquipotentiallinien in den Punkten A und C nicht mehr spitze Winkel der Größe $\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$ sind, sondern stumpfe Winkel $\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. Dies bedeutet, daß in den aufgestellten Gleichungen die Winkelgröße ε durch ihren Negativwert $-\varepsilon$ zu ersetzen ist, wenn das einfallende Elektron im beschleunigten Felde von der Seite der Divergenz auf

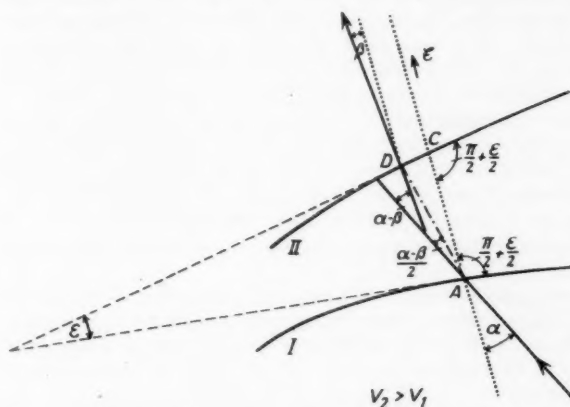


Abb. 4. Elektronenbrechung an nicht-parallelen Äquipotentiallinien; Eintritt von der Seite der Divergenz der Potentiallinien

eine Potentiallinie trifft. Der Aufbau von Gl. (3.06) zeigt aber, daß dem Einsetzen eines negativen Winkels $-\varepsilon$ äquivalent ist, wenn man ε weiterhin als positive Größe betrachtet und α und β negativ rechnet.

Hinsichtlich der Konstruktion eines Abschnittes der Elektronenbahn ergibt sich als folgendes:

Aus Gl. (3.06) kann man den Winkel β gegen die Symmetrienormale berechnen, unter welchem bei gegebenen Anfangsbedingungen und gegebenen Potentialen des Feldes das Elektron aus der Potentiallinie II austritt. Man kann also auch aus (3.06) den Ablenkungswinkel $(\alpha - \beta)$ zwischen Eintrittsbahn und Austrittsbahn des Elektrons berechnen. Den halben Ablenkungswinkel $\frac{\alpha - \beta}{2}$ hat man nun im Eintrittspunkt A in die Potentiallinie I anzutragen und geradlinig die Bahn weiter zu verfolgen, bis man im Punkte D die Äquipotentiallinie II schneidet. In diesem Punkt hat man wiederum den halben Ablenkungswinkel $\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ anzutragen und erhält dann im Austrittspunkt D die Austrittsrichtung aus der Potentiallinie.

Eine solche Konstruktion ist im Ergebnis vollkommen äquivalent einer Konstruktion, die den durch (2.01) charakterisierten momentanen Krümmungsradius als Konstruktionselement verwendet. Gl. (3.06) gestattet also für die weitere Untersuchung, auf rein rechnerischem Wege den Austrittspunkt aus der Potentiallinie II sowie die Austrittsrichtung zu bestimmen, die man erhalten würde, wenn man den momentanen Krümmungsradius der Elektronenbahn graphisch konstruieren würde.

§ 4. Theoretische Berechnung von Elektronenbahnen im Felde $\Phi = k \cdot \varphi$

Will man nun prüfen, mit welcher Genauigkeit eine graphische Konstruktion von Elektronenbahnen durchgeführt werden kann, so ist es erforderlich, die theoretische Elektronenbewegung in gewissen typischen Potentialfeldern möglichst genau zu beherrschen. Zu diesem Zweck sollen die Elektronenbahnen in dem Potentialfeld $\Phi = k \cdot \varphi$ untersucht werden (r, φ Zylinderkoordinaten). Die Potentialfunktion $\Phi = k \cdot \varphi$ entspricht etwa der Bewegungsart, wie sie eine auf einer Schraubenfläche (Korkenzieherfläche) rollende Kugel erfährt. Obwohl die letztgenannte Potentialfunktion elektrisch nicht realisierbar ist, erscheint sie trotzdem für die Analyse der Vorgänge geeignet; denn ein kleiner Ausschnitt aus einem Potentialfeld wird in erster Ordnung durch zwei unter einem Winkel geradlinig verlaufende Potentiallinien angenähert. Im Grenzfall führt die Potentialfunktion zu der Funktion $\Phi = k \cdot y$ (x, y Cartesische Koordinaten) und damit zu einer Elektronenbewegung, wie sie dem schiefen Wurf im Schwerfeld entspricht (Parabelbahn).

Die Bewegungsgleichung in einem Potentialfeld $\Phi = k \cdot \varphi$ ergibt eine nicht-lineare Abelsche Differentialgleichung erster Art, deren Lösung näherungsweise auf dem Wege der Reihenentwicklung gewonnen werden kann. Auszugehen ist davon, daß in Zylinderkoordinaten r, φ für Gradient, Geschwindigkeit und Beschleunigung gilt^{a)}:

$$\begin{aligned} \text{grad}_r &= \frac{\partial}{\partial r} & \text{grad}_\varphi &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ v_r &= \frac{dr}{dt} & v_\varphi &= r \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{d}{dt} v_r &= \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \\ \frac{d}{dt} v_\varphi &= r \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}$$

Somit gilt für das betrachtete Potentialfeld $\Phi = k \cdot \varphi$ die Bewegungsgleichung in r, φ Koordinaten

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 0 \quad (4.01)$$

entsprechend: $m v'_r = e \text{ grad}_r \Phi$

$$m \left[r \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right] = \frac{e k}{r} \quad (4.02)$$

entsprechend: $m v'_\varphi = e \text{ grad}_\varphi \Phi$.

^{a)} G. Joos, Lehrbuch der theoretischen Physik. Leipzig 1945, S. 69.

Betrachtet man nun r als Funktion von φ und φ als Funktion der Zeit, so ergibt sich

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 r}{d\varphi^2} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

Somit erhält man aus Gl. (4.01) und (4.02) die beiden Gleichungen

$$\left[\frac{d^2 r}{d\varphi^2} - r\right] \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0$$

$$m \cdot \left[2 \frac{dr}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2}\right] = \frac{ek}{r}.$$

Durch Multiplikation mit $m \cdot r$ bzw. mit $-\frac{dr}{d\varphi}$ läßt sich $\frac{d^2 \varphi}{dt^2}$ eliminieren und man erhält

$$m \left[r \cdot \frac{d^2 r}{d\varphi^2} - r^2 - 2 \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \right] \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{ek}{r} \cdot \frac{dr}{d\varphi}. \quad (4.03)$$

Andererseits gilt nun für die kinetische Energie die Beziehung

$$\frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right] = \text{Const.} + ek\varphi, \quad (4.04)$$

wobei die Konstante die kinetische Energie am Orte $\varphi = 0$ bezeichnet, also in Elektronenvolt ausgedrückt, sich ergibt zu

$$\text{Const.} = e \cdot V_{\text{anf}} = ek \cdot \varphi_{\text{anf}}.$$

Für die weitere Rechnung ist es zweckmäßig, an Stelle von V_{anf} den Winkel φ_{anf} zu benutzen.

φ_{anf} bedeutet also den Winkel, den ein Elektron mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 im Felde $\Phi = k \cdot \varphi$ durchlaufen haben muß, um die Energie $e \cdot V_{\text{anf}}$ zu erhalten. So läßt sich aus Gl. (4.4) der Term

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2ek \cdot (\varphi + \varphi_{\text{anf}})}{m \cdot \left(r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right)}$$

berechnen und in (4.03) einsetzen; man erhält dann für die Bahngleichung die Beziehung

$$2 \left[r \cdot \frac{d^2 r}{d\varphi^2} - r^2 - 2 \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \right] \cdot [\varphi + \varphi_{\text{anf}}] = -\frac{1}{r} \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \right] \frac{dr}{d\varphi}. \quad (4.05)$$

Gl. (4.05) stellt die zu lösende allgemeine Bewegungsgleichung dar.

Zu den Gleichungen der Elektronenbewegung in einem Felde paralleler, gerader Äquipotentiallinien gelangt man auf dem Wege der Spezialisierung durch einen Grenzübergang folgender Art:

Es wird gesetzt:

$$r \rightarrow \infty$$

$$dr \rightarrow dx$$

$$r\varphi \rightarrow y$$

$$r d\varphi \rightarrow dy.$$

Durch diese Substitution geht Gl. (4.05) nach beiderseitiger Division mit $\frac{1}{r^2}$ über in die Gleichung

$$2 \cdot \left[\frac{d^2 x}{dy^2} - \frac{1}{r} - \frac{2}{r} \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \right] \cdot [y + y_{\text{anf}}] = - \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \right] \cdot \frac{dx}{dy},$$

woraus wegen $r \rightarrow \infty$ folgt:

$$2[y + y_{\text{ant}}] \frac{d^2 x}{dy^2} + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \frac{dx}{dy} = 0 \quad (4.06)$$

Gl. (4.06) ist lösbar und hat zur Lösung⁹⁾

$$(x + C_1)^2 = 2 C_2 \cdot (y + y_{\text{ant}}) - C_2^2. \quad (4.07)$$

Die Integrationskonstanten C_1 , C_2 bestimmen sich daraus, daß für $y = 0$ erfüllt sein muß:

$$x = 0, \text{ d. h.: } C_1^2 = C_2 [2 y_{\text{ant}} - C_2]$$

$$\tan \alpha = \frac{v_x}{v_y} \Big|_{y=0} = \frac{dx}{dy} \Big|_{y=0} = \frac{C_2}{C_1}.$$

Daraus erhält man:

$$C_2 = 2 \sin^2 \alpha \cdot y_{\text{ant}}.$$

Die Lösung von (4.07) nach $\tan \beta = \frac{dx}{dy}$ ergibt daher:

$$\tan \beta = \frac{dx}{dy} = \frac{C_2}{C_1 + x} = \frac{1}{\sqrt{2 y + y_{\text{ant}} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{y + y_{\text{ant}}}{y_{\text{ant}} \cdot \sin^2 \alpha} - 1}},$$

mithin

$$\frac{1}{\sin^2 \beta} = \frac{y + y_{\text{ant}}}{y_{\text{ant}}} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (4.08)$$

oder

$$\sin \beta = \sqrt{\frac{V_1 + V_{\text{ant}}}{V_2 + V_{\text{ant}}}} \cdot \sin \alpha. \quad (4.09)$$

Gl. (4.09) entspricht Gl. (2.02) und stellt, wie zu erwarten, das Snelliussche Brechungsgesetz dar.

Weiter ergibt sich für den Winkel γ , unter welchem der Austrittspunkt D erscheint (im Eintrittspunkt A gegen das Lot gemessen), vgl. Abb. 1

$$\begin{aligned} \tan \gamma &= \frac{x}{y} = \frac{C_2}{y} \cdot \left\{ \sqrt{2 \frac{y + y_{\text{ant}}}{C_2} - 1} - \frac{C_1}{C_2} \right\} \\ &= \frac{2 \sin^2 \alpha \cdot y_{\text{ant}}}{y} \cdot \left\{ \sqrt{\frac{y + y_{\text{ant}}}{y_{\text{ant}}} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1} - \text{ctn} \alpha \right\} \\ &= 2 \cdot \frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta} \cdot \left\{ \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \beta} - 1} - \text{ctn} \alpha \right\} \end{aligned}$$

oder da, vgl. (4.08), sich ergibt

$$\frac{y_{\text{ant}}}{y} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta},$$

so folgt:

$$\tan \gamma = 2 \cdot \frac{1}{\text{ctn}^2 \beta - \text{ctn}^2 \alpha} \cdot \{\text{ctn} \beta - \text{ctn} \alpha\},$$

also

$$\text{ctn} \gamma = \frac{1}{2} \cdot \{\text{ctn} \alpha + \text{ctn} \beta\}. \quad (4.10)$$

⁹⁾ E. Kamke, Differentialgleichungen Bd. 1, S. 24, 564.

Gl. (4.10) gestattet also, vgl. Abb. 1, den Winkel $\angle CAD = \gamma$ zu berechnen und damit den Austrittspunkt D festzulegen, wenn α und β bekannt sind. Gl. (4.09) und (4.10) geben also die theoretisch korrekten Beziehungen zwischen Eintritts- bzw. Austrittsort eines Elektrons für den Spezialfall zweier paralleler Potentiallinien an.

Um nun Gl. (4.05) allgemein zu lösen, werden die neuen Variablen

$$\eta = \ln \frac{r}{r_0} \text{ und } \xi = \varphi + \varphi_{\text{ant}}$$

eingeführt. Für dieselben gilt:

$$\eta' = \frac{d\eta}{d\varphi} = \frac{dr}{r \cdot d\varphi} = \frac{v_r}{v_\varphi}$$

$$\eta'' = \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\varphi} \right) = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2r}{d\varphi^2} = -\eta'^2 + \frac{1}{r} \frac{d^2r}{d\varphi^2}.$$

Dadurch geht Gl. (4.05) über in

$$-2\xi \cdot \eta'' = \eta'^3 - 2\xi \cdot \eta'^2 + \eta - 2\xi. \quad (4.11)$$

Gl. (4.11) ist eine nicht-lineare Differentialgleichung vom Typ einer Abel'schen Differentialgleichung erster Art¹⁰⁾. Zu ihrer Lösung wird der Ansatz einer Taylor-Reihe gemacht.

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= \eta(\varphi + \varphi_{\text{ant}}) \\ &= \eta(\xi_0) + \eta'(\xi_0) \cdot (\xi - \xi_0) + \eta''(\xi_0) \cdot \frac{(\xi - \xi_0)^2}{2} + \eta'''(\xi_0) \cdot \frac{(\xi - \xi_0)^3}{3!} \\ &\quad + \eta^{IV}(\xi_0) \cdot \frac{(\xi - \xi_0)^4}{4!} + \eta^V(\xi_0) \cdot \frac{(\xi - \xi_0)^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

d. h. in r und φ ausgedrückt

$$\ln \frac{r}{r_0} = + \eta'(\varphi_{\text{ant}}) \cdot \varphi + \eta''(\varphi_{\text{ant}}) \cdot \frac{\varphi^2}{2} + \eta'''(\varphi_{\text{ant}}) \cdot \frac{\varphi^3}{3!} + \eta^{IV}(\varphi_{\text{ant}}) \cdot \frac{\varphi^4}{4!} + \dots \quad (4.12)$$

Dabei ist der Anfangswert:

$$\eta(\xi_0) = \eta(\varphi_{\text{ant}}) \equiv 0.$$

Die in Gleichung (4.12) auftretenden höheren Differentialquotienten berechnen sich bei Zugrundelegung bestimmter Anfangswerte φ_{ant} , $\eta'(\varphi_{\text{ant}})$ durch weiteres Differenzieren der Differentialgleichung (4.11). Das sich so ergebende Schema für die erste bis achte Ableitung ist in Anhang Ia angegeben.

¹⁰⁾ Trigonometrisch ist die Verwandtschaft von Gl. (4.10) mit Gl. (3.10) in folgendem begründet:

$$\begin{aligned} \tan \gamma &= \frac{2}{\operatorname{ctn} \alpha + \operatorname{ctn} \beta} = \frac{2 \sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta} \\ &= \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1 - \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Ist also $\alpha - \beta < 1$, so wird

$$\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \tan \gamma.$$

Im allgemeinen ergeben sich ziemlich umfangreiche Terme. Die Koeffizienten werden einfach für den Fall, daß das Elektron mit der Geschwindigkeit Null aus der Potentiallinie $= 0$ austritt. Dann wird in Gl. (4.11)

$$\xi_0 = \varphi_{\text{ant}} = 0 \quad \text{und} \quad \eta'(\varphi_{\text{ant}}) = 0.$$

Man erhält dann auf Grund einer Grenzwertbetrachtung für die Ableitungen von η im Punkte $\xi_0 = \varphi_{\text{ant}} = 0$ die folgenden Werte:

$$\begin{array}{lll} \eta(0) = 0 & \eta^{\text{III}}(0) = 0 & \eta^{\text{VI}}(0) = 1,231 \\ \eta^{\text{I}}(0) = 0 & \eta^{\text{IV}}(0) = \frac{32}{63} = 0,508 & \eta^{\text{VII}}(0) = 0 \\ \eta^{\text{II}}(0) = \frac{2}{3} & \eta^{\text{V}}(0) = 0 & \eta^{\text{VIII}}(0) = 7,881. \end{array}$$

Übrigens muß $\ln \frac{r}{r_0} = e^{+\frac{\varphi}{3}} - 1$ eine günstige Annäherung für den Fall des Austrittes mit der Geschwindigkeit Null darstellen. Denn es ist:

$$\begin{array}{lll} \ln \frac{r}{r_0} \Big|_{r=0} = 0 & \frac{d}{dr} \ln \frac{r}{r_0} \Big|_{r=0} = 0 & \frac{d^2}{dr^2} \ln \frac{r}{r_0} \Big|_{r=0} = \frac{2}{3} \\ \frac{d^3}{dr^3} \ln \frac{r}{r_0} \Big|_{r=0} = 0 & \frac{d^4}{dr^4} \ln \frac{r}{r_0} \Big|_{r=0} = \frac{4}{3} & \frac{d^5}{dr^5} \ln \frac{r}{r_0} = 0. \end{array}$$

Gewisse Vereinfachungen bei der Berechnung der Koeffizienten der Taylor-Reihe ergeben noch die Fälle

$$\frac{v_r}{v_\varphi} \Big|_{\varphi=0} = \eta'(\xi_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{v_r}{v_\varphi} \Big|_{\varphi=0} = \eta'(\xi_0) = 2 \cdot \varphi_{\text{ant}}$$

Im erstgenannten Falle wird nämlich $\eta''(\xi_0) = 1$.

Im zweiten Falle $\eta''(\xi_0) = 0$.

Offenbar gestattet jedoch Gl. (4.11) nicht die Berechnung des Falles, daß die Elektronen tangierend mit irgendwelcher Geschwindigkeit aus der Potentiallinie $\varphi = 0$ austreten; denn diesem Spezialfall würde entsprechen

$$\eta'(\xi_0) = \left(\frac{v_r}{v_\varphi} \right)_{\varphi=0} = \infty,$$

so daß Gl. (4.11) ihren Sinn verliert. Es läßt sich jedoch Gl. (4.11) als Bestimmungsgleichung für ξ als Funktion von η umformen. Setzt man nämlich

$$\xi' = \frac{d\xi}{d\eta} = \frac{1}{\frac{d\eta}{d\xi}} = \frac{1}{\eta'},$$

so wird

$$\xi'' = \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{\eta'} \right) = \left[\frac{d}{d\xi} \cdot \left(\frac{1}{\eta'} \right) \right] \cdot \frac{d\xi}{d\eta} = -\frac{1}{\eta'^2} \cdot \eta'' \cdot \xi' = -\xi'^2 \cdot \eta''.$$

Dann erhält man aus Gl. (4.11) die Beziehung:

$$2\xi \cdot \xi'' = -2\xi \cdot \xi'^2 + \xi'^2 - 2\xi \cdot \xi' + 1. \quad (4.13)$$

In Gl. (4.13) würde sich nunmehr für den Fall des tangentiellen Austrittes aus einer Potentiallinie (entsprechend $\xi'(0) = 0$) ergeben:

$$\xi'' = \frac{1}{2\xi}.$$

Anhang Ia

$$\begin{aligned}
-2x \cdot y'' &= y'^3 - 2xy'^2 + y' - 2x \\
-2x \cdot y''' &= 3y''^2 + 3y'^2 y'' - 2y'^2 - 4xy' y'' - 2 \\
-2x \cdot y^{(4)} &= 5y''^3 + 6y' y''^2 + 3y'^2 y''' - 8y' y'' - 4xy'^2 - 4xy' y''' \\
-2x \cdot y^{(5)} &= 7y''^4 + 6y' y''^3 + 18y' y''^2 y''' + 3y'^2 y^{(4)} - 12y'^2 - 12y' y'' - 12xy' y'' - 4xy' y''' \\
-2x \cdot y^{(6)} &= 9y''^5 + 36y' y''^4 + 18y' y''^3 y''' + 24y' y''^2 y^{(4)} + 3y'^2 y^{(5)} - 48y' y'' - 16y' y''' - 12xy' y''' \\
&\quad - 16xy' y'' - 4xy' y^{(4)} \\
-2x \cdot y^{(7)} &= 11y''^6 + 90y' y''^5 + 60y' y''^4 y''' + 30y' y''^3 y^{(4)} + 3y'^2 y^{(6)} - 60y'^2 - 80y' y''' \\
&\quad - 20y' y^{(4)} - 40xy' y'' - 20xy' y''' - 4xy' y^{(4)} \\
-2x \cdot y^{(8)} &= 13y''^7 + 90y''^6 + 360y' y''^5 + 90y'^2 y''^4 + 60y' y''^3 y^{(4)} + 90y' y''^2 y^{(5)} + 36y' y'' y^{(6)} + 3y'^2 y^{(7)} \\
&\quad - 240y' y'' - 120y' y''' - 24y' y^{(4)} - 40xy' y'' - 60xy' y''' - 24xy' y^{(4)} - 4xy' y^{(5)}
\end{aligned}$$

Anhang Ib

$$\begin{aligned}
2x \cdot x'' &= -2xx'^3 + x'^2 - 2xx' + 1 \\
2x \cdot x''' &= -2x'^4 - 6xx'^2 x'' - 2x'^2 - 2xx'' \\
2x \cdot x^{(4)} &= -2x' x''^3 - 14x'^3 x'' - 12xx' x''^2 - 6xx'^2 x'' - 6x' x'' - 2xx''' \\
2x \cdot x^{(5)} &= -4x' x''^4 - 2x' x''^3 - 64x'^3 x''^2 - 20x'^3 x'' - 12xx' x''^3 - 36xx' x'' x'' - 6xx'^2 x'' - 6xx'^2 - 8xx' - 2xx'' \\
2x \cdot x^{(6)} &= -6x' x''^5 - 6x'' x''^4 - 2x''^3 - 128x' x''^3 - 128x' x''^2 x'' - 224x'^2 x''^2 x'' - 26x'^3 x'' - 12x' x''^3 - 72xx'^2 x'' \\
&\quad - 36x' x'' x''^2 - 48xx' x'' x'' - 6xx'^2 x'' - 20x' x'' - 10x' x'' - 2xx'' \\
2x \cdot x^{(7)} &= -8x' x''^6 - 12x' x''^5 - 10x''^4 - 140x' x''^4 - 940x' x''^3 x'' - 260x'^2 x''^3 - 350x'^2 x'' x'' - 32x'^3 x'' \\
&\quad - 180xx' x''^2 - 120xx' x''^2 x'' - 120xx' x'' x'' - 60xx' x'' x'' - 6xx'^2 x'' - 20x''^2 - 30x'' \\
&\quad - 12x' x'' - 2xx'' \\
2x \cdot x^{(8)} &= -10x' x''^7 - 20x' x''^6 - 32x''^5 - 10x''^4 - 1500x' x''^4 - 2580x' x''^3 x'' - 1760x' x''^2 x'' \\
&\quad - 990x'^2 x''^3 - 506x'^2 x'' x'' - 180xx' x''^2 x'' - 38x'^3 x'' - 180xx' x''^3 - 720xx' x'' x'' - 120xx' x''^2 \\
&\quad - 180xx' x'' x'' - 72xx' x'' x'' - 6xx'^2 x'' - 70x' x'' - 42x' x'' - 14x' x'' - 2xx''
\end{aligned}$$

Die höheren Differentialquotienten der Funktion $\xi(\eta)$ erhält man dann durch weiteres Differenzieren von (4.13) (vgl. Anhang Ib). Speziell erhält man für den Fall des tangentiellen Austrittens aus der Potentiallinie $\varphi = 0$ die höheren Differentialquotienten:

$$\begin{aligned}\xi^{\text{I}}(0) &= 0 & \xi^{\text{V}}(0) &= -\frac{1}{2\varphi_{\text{anf}}} \cdot \left[\frac{5}{2\varphi_{\text{anf}}^2} + 1 \right] \\ \xi^{\text{II}}(0) &= \frac{1}{2\varphi_{\text{anf}}} & \xi^{\text{VI}}(0) &= \frac{1}{2\varphi_{\text{anf}}} \cdot \left[\frac{29}{2\varphi_{\text{anf}}^2} + 1 \right] \\ \xi^{\text{III}}(0) &= -\frac{1}{2\varphi_{\text{anf}}} & \xi^{\text{VII}}(0) &= -\frac{1}{2\varphi_{\text{anf}}} \cdot \left[+\frac{5}{4\varphi_{\text{anf}}^4} + \frac{59}{\varphi_{\text{anf}}^2} + 1 \right] \\ \xi^{\text{IV}}(0) &= \frac{1}{2\varphi_{\text{anf}}} & \xi^{\text{VIII}}(0) &= \frac{1}{2\varphi_{\text{anf}}} \cdot \left[\frac{85}{\varphi_{\text{anf}}^4} + \frac{413}{2\varphi_{\text{anf}}^2} + 1 \right].\end{aligned}\quad (4.14)$$

Um also für den Spezialfall des tangierenden Austrittes des Elektrons die Lösung zu erhalten, wird für $\xi = \varphi + \varphi_{\text{anf}}$ als Funktion von $\eta = \ln \frac{r}{r_0}$ wiederum eine Taylor-Reihe angesetzt.

$$\begin{aligned}\xi(\eta) &= \xi(\eta_0) + \xi^{\text{I}}(\eta_0)(\eta - \eta_0) + \xi^{\text{II}}(\eta_0) \cdot \frac{(\eta - \eta_0)^2}{2} + \xi^{\text{III}}(\eta_0) \frac{(\eta - \eta_0)^3}{3!} \\ &\quad + \xi^{\text{IV}}(\eta_0) \cdot \frac{(\eta - \eta_0)^4}{4!} + \xi^{\text{V}}(\eta_0) \cdot \frac{(\eta - \eta_0)^5}{5!} + \dots\end{aligned}$$

Da gemäß Definition $\eta_0 \equiv 0$ und $\xi(\eta_0) = \varphi_{\text{anf}}$ ist, so ergibt die Taylor-Reihe als Darstellung von φ in funktioneller Abhängigkeit von $\eta = \ln \frac{r}{r_0}$

$$\varphi = \xi^{\text{I}}(0) \cdot \ln \frac{r}{r_0} + \frac{\xi^{\text{II}}(0)}{2} \left[\ln \frac{r}{r_0} \right]^2 + \frac{\xi^{\text{III}}(0)}{3!} \left(\ln \frac{r}{r_0} \right)^3 + \frac{\xi^{\text{IV}}(0)}{4!} \cdot \left(\ln \frac{r}{r_0} \right)^4 + \dots \quad (4.15)$$

Die in Gl. (4.15) auftretenden höheren Differential-Quotienten sind für $\xi^{\text{I}}(0) = 0$ die in (4.14) angegebenen Werte.

Sowohl Gl. (4.11) als auch Gl. (4.15) liefern durch Differenzieren nach φ bzw. η die Neigung der Bahnkurve gegen die Potentiallinie bzw. ihr Lot; denn es ist ja laut Definition

$$\eta' = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\varphi} = \frac{v_r}{v_\varphi} \quad \text{und} \quad \xi^{\text{I}} = \frac{1}{\eta'} = \frac{v_\varphi}{v_r}.$$

Die Konvergenz der Reihen (4.11) und (4.15) erwies sich nicht als sehr gut. Obwohl die achte Ableitung mit berücksichtigt wurde, waren Genauigkeiten von etwa 1/4% nur für Winkel $\varphi \leq \frac{\varphi_{\text{anf}}}{2}$ zu erhalten. Nur der erste Fall $\varphi_{\text{anf}} = 0$ ergab sehr viel günstigere Konvergenz, nämlich bis etwa $\varphi = 57^\circ$. Durch analytische Fortsetzung wurde dieser Fall bis zu $\varphi = 120^\circ$ weiter berechnet.

Insgesamt wurden die nachfolgenden Bahnen berechnet und in Abb. 5 graphisch wiedergegeben.

$\varphi_{\text{anf}} = 0$	und	$\frac{v_r}{r \cdot v_\varphi} \varphi = 0$	=	0		
$= \frac{1}{2}$	und	$\frac{v_r}{r \cdot v_\varphi} \varphi = 0$	=	0	1	∞
$= 1$	und	$\frac{v_r}{r \cdot v_\varphi} \varphi = 0$	=	0	2	∞
$= 2$	und	$\frac{v_r}{r \cdot v_\varphi} \varphi = 0$	=	0	4	∞

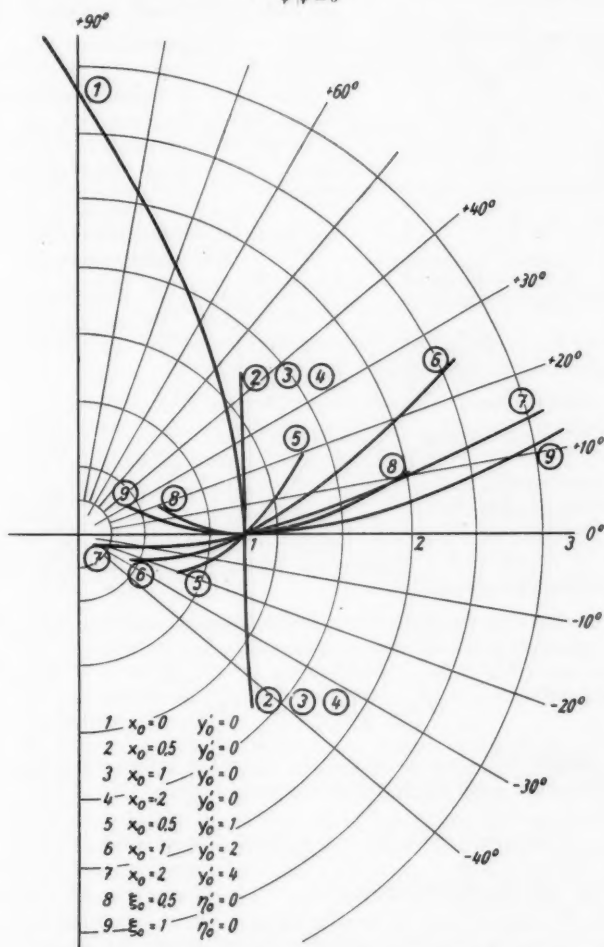
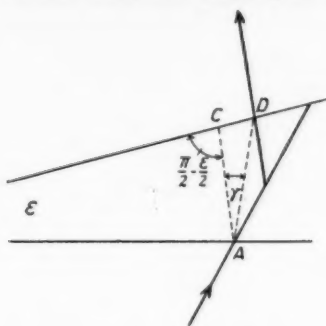


Abb. 5. Typische Elektronenbahnen im Potentialfeld $\Phi = k \cdot \varphi$

Hinsichtlich des Austrittspunktes D bzw. des Winkels $\gamma = \angle CAD$ ergibt sich aus Abb. 6 durch Anwendung des Sinus-Satzes



$$AC = 2 \cdot r_0 \cdot \sin \frac{\varepsilon}{2}$$

$$CD = r - r_0$$

$$\angle AD = \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \gamma$$

Abb. 6. Konstruktion des Austrittspunktes im Falle der Brechung an nicht-parallelen Potentiallinien

beiden behandelten graphischen Konstruktionsweisen der Elektronenbahnen vorzunehmen.

Die zu untersuchenden Konstruktionen bestehen in folgendem:

Gegeben sind zwei Potentiallinien I und II mit den Potentialen V_1 und V_2 . Die Potentialen bilden gegeneinander den Winkel ε . Das Elektron tritt mit der Geschwindigkeit $V_1 + V_{\text{anf}}$ in die Potentiallinie I ein und verläßt die Potentiallinie II mit der Geschwindigkeit $V_2 + V_{\text{anf}}$. Dabei ist mit V_{anf} die Geschwindigkeit des Elektrons bei seinem Austritt aus der Kathode, der die Spannung $V = 0$ zukommt, bezeichnet. Der Eintrittswinkel gegen die Symmetrienormale sei α .

Gemäß dem Snelliusschen Brechungsgesetz wird der Austrittswinkel β_0 , gerechnet gegen die Symmetrienormale, berechnet zu

$$\sin \beta_0 = \sqrt{\frac{V_1 + V_{\text{anf}}}{V_2 + V_{\text{anf}}}} \cdot \sin \alpha. \quad (2.02)$$

Gemäß der Krümmungsradius-Konstruktion wird der Austrittswinkel β_0 , gerechnet gegen die Symmetrienormale, berechnet zu

$$\sin \left(\beta_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) = \sin \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \psi \cdot \cos \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sin \alpha. \quad (3.07)$$

Dabei bedeutet die Größe ψ :

$$\psi = \frac{V_2 - V_1}{V_2 + V_1 + 2 V_{\text{anf}}}.$$

$$\frac{\cos \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\sin \gamma} = \frac{2 \cdot r_0 \cdot \sin \frac{\varepsilon}{2}}{r - r_0},$$

also

$$\tan \gamma = \tan \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left[1 + \frac{2}{\frac{r}{r_0} - 1} \right]. \quad (4.16)$$

Auch die Winkel γ wurden gemäß (4.16) für die oben angegebenen Parameter φ_{anf} und

$$\frac{v_r}{r \cdot v_\varphi} \Big|_{\varphi=0} \text{ berechnet.}$$

Die in Abb. 5 dargestellten Elektronenbahnen bilden die Grundlage, auf der eine Kontrolle der Genauigkeit der graphischen Konstruktionsweisen vorgenommen wurde.

§ 5. Genauigkeitskontrolle der graphischen Konstruktionsweisen

Die erhaltenen Ergebnisse gestatten nunmehr eine Abschätzung der bei den Konstruktionsweisen der Elektronenbahnen erzielbaren Genauigkeit vorzunehmen.

Die Winkel α und β werden positiv gerechnet, wenn der Eintritt des Elektrons in das beschleunigende Feld von der Seite der Konvergenz der Äquipotentiallinien I und II erfolgt. Erfolgt er von der Seite der Divergenz, so sind sie negativ zu rechnen.

Die Konstruktion des Austrittspunktes des Elektrons aus der Potentiallinie II erfolgt dadurch, daß im Eintrittspunkt des Elektrons in die Potentiallinie I der Winkel $\frac{\alpha + \beta}{2}$ an die Symmetrienormale angetragen wird.

So erhält man Austrittspunkt und Austrittsrichtung aus der Potentiallinie II.

Die Genauigkeitskontrolle der Konstruktionen wurde in folgender Weise durchgeführt:

Für den Fall $\varepsilon = 0$ ist die theoretisch richtige Elektronenbewegung die Parabelbahn. Für den Austrittswinkel β aus der Potentiallinie II gilt das Snelliussche Brechungsgesetz.

$$\sin \beta = \sqrt{\frac{V_1 + V_{\text{anf}}}{V_2 + V_{\text{anf}}}} \cdot \sin \alpha. \quad (4.09)$$

Der Austrittspunkt D aus der Potentiallinie II bestimmt sich aus dem gegen die Normale gemessenen Winkel γ :

$$\text{ctn } \gamma = \frac{1}{2} \cdot (\text{ctn } \alpha + \text{ctn } \beta). \quad (4.10)$$

Für $\varepsilon \neq 0$ wurden aus den berechneten Elektronenbahnen (vgl. § 4) Abschnitte ausgewählt, bei denen für das Verhältnis von Eintrittsgeschwindigkeit $V_1 + V_{\text{anf}}$ zur Austrittsgeschwindigkeit $V_2 + V_{\text{anf}}$ die ψ -Werte betragen:

$$\psi = \frac{V_2 - V_1}{V_1 + V_2 + 2 V_{\text{anf}}} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \text{ und } \frac{1}{32}.$$

Und zwar wurden solche Abschnitte ausgewählt, bei welchen sich diese ψ -Verhältnisse für eine gegenseitige Neigung der Potentiallinien I und II von $\varepsilon = 5, 10$ und 20° ergeben. Für diese herausgegriffenen Teile der Bahnen ergeben sich gewisse Eintrittswinkel α und gewisse Austrittswinkel β . Ferner wurde der Winkel γ , gemessen gegen die Symmetrienormale, berechnet, unter welchem der Austrittspunkt D aus der Potentiallinie II im Eintrittspunkt A erscheint. Hinsichtlich des Austrittspunktes D bzw. des Winkels $\gamma = \angle CAD$ galt die Beziehung

$$\text{ctn } \gamma = \tan \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left[1 + \frac{2}{\frac{r}{r_0} - 1} \right]. \quad (4.16)$$

Die Tabellen 1–4 zeigen nun für verschiedene Werte ψ und verschiedene Eintrittswinkel α die theoretisch richtigen Austrittswinkel aus der Potentiallinie II, und zwar für die Neigungswinkel $\varepsilon = 0, 5, 10, 20^\circ$.

Diese als theoretisch richtig bezeichneten Winkel wurden, wie ausgeführt, auf dem Wege der Reihenentwicklung gewonnen. Sie sind daher mit Fehlern behaftet. Diese Fehler wurden unter Zugrundelegen des letzten bei der Reihenentwicklung noch berücksichtigten Gliedes nach Größe und Richtung abgeschätzt. So wurden für Eintritts- und Austrittswinkel in den Tabelle Bereiche angegeben, innerhalb welcher nun wirklich der theoretisch richtige Winkelwert liegt.

Auf Grund dieser Winkelbereiche wurde nun ein Maximal- und ein Minimalwert für den theoretischen abgebeugten Winkel $\alpha - \beta$ gewonnen. Sodann wurde unter Benutzung von Gl. (4.09) (Snelliussches Brechungsgesetz) und (3.07)

(Krümmungsradiuskonstruktion) für den in den Tabellen durch Unterstreichen gekennzeichneten Wert des Eintrittswinkels der Austrittswinkel berechnet. Derselbe wurde für die Snellius-Konstruktion mit β_s für die Krümmungsradiuskonstruktion mit β_0 bezeichnet. Unter Benutzung dieser Austrittswinkel wurden die zugehörigen Abbeugungswinkel $(\alpha - \beta)_0$ bzw. $(\alpha - \beta_s)$ gebildet und in die Tabellen eingetragen.

Eine weitere Zeile zeigt die für den Austrittsort maßgebliche Winkelgröße γ gemäß Gl. (4.16) mit ihrem zugehörigen Fehler. Als Vergleichsgröße zum Winkel γ ist aufgeführt der Winkel entsprechend Gl. (3.10)

$$\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta_s). \quad (3.10)$$

Auf Grund dieser in den Tabellen zusammengefaßten Daten läßt sich nunmehr ein Vergleich der mit der Snelliusschen Brechungskonstruktion, bzw. der Krümmungsradiuskonstruktion erzielbaren Genauigkeit vornehmen. Dabei soll grundsätzlich angenommen werden, daß eine Konstruktionsgenauigkeit von $< \frac{1}{2}^\circ$ als befriedigend angesehen werden kann.

Das Ergebnis ist das folgende:

A. Tabelle 1 ($\varepsilon = 0$).

Die Konstruktionsweise, die auf dem momentanen Krümmungsradius beruht, liefert, wie zu erwarten war (vgl. § 3) nur für Größen $\varphi \ll 1$ befriedigende Resultate.

Tabelle 1. Brechung an parallelen Potentiallinien

 $\varepsilon = 0$

α	γ	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32
$2\frac{1}{2}^\circ$	β	1°27'	1°56'	2°12'	2°21'	2°25'
	β_{00}	1°15'	1°52'	2°12'	2°21'	2°25'
	γ	1°50'	2°11'	2°20'	2°25'	2°28'
	$\frac{1}{2}(\alpha + \beta_{00})$	1°52'	2°11'	2°21'	2°25'	2°28'
5°	β	2°53'	3°52'	4°25'	4°42'	4°51'
	β_{00}	2°30'	3°45'	4°23'	4°42'	4°51'
	γ	3°40'	4°25'	4°42'	4°49'	4°54'
	$\frac{1}{2}(\alpha + \beta_{00})$	3°45'	4°22'	4°42'	4°51'	4°55'
10°	β	5°45'	7°44'	8°49'	9°22'	9°41'
	β_{00}	4°59'	7°30'	8°44'	9°21'	9°41'
	γ	7°21'	8°44'	9°22'	9°42'	9°51'
	$\frac{1}{2}(\alpha + \beta_{00})$	7°30'	8°45'	9°22'	9°41'	9°50'
20°	β	11°24'	15°21'	17°32'	18°44'	19°22'
	β_{00}	9°51'	14°50'	17°25'	18°41'	19°22'
	γ	14°32'	17°23'	18°41'	19°20'	19°40'
	$\frac{1}{2}(\alpha + \beta_{00})$	14°	17°25'	18°45'	19°21'	19°41'
40°	β	21°46'	29°51'	34°29'	37°8'	38°31'
	β_{00}	18°44'	28°49'	34°13'	37°4'	38°30'
	γ	28°26'	34°15'	37°5'	38°31'	29°14'
	$\frac{1}{2}(\alpha + \beta_{00})$	29°22'	34°22'	37°6'	38°32'	29°15'
60°	β	29°58'	42°7'	49°47'	54°26'	57°3'
	β_{00}	25°40'	40°30'	49°16'	54°16'	57°2'
	γ	40°52'	49°58'	54°33'	57°8'	58°31'
	$\frac{1}{2}(\alpha + \beta_{00})$	42°50'	50°15'	54°38'	57°8'	58°31'

Für den Fall $\varepsilon = 0$ ist eben zur Berechnung des Austrittswinkels die Konstruktion nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz die richtige. Man sieht weiter, daß, wenn die Bedingung erfüllt ist $\alpha \cdot \psi < 10^\circ$, man bedenkenlos den Austrittsort D durch Zeichnen des Winkels $\frac{1}{2}(\alpha + \beta_s)$ konstruieren kann. Eine solche Konstruktion ist einfacher auszuführen, als die des korrekten Winkels

$$\text{ctn } \gamma = \frac{1}{2} (\text{ctn } \alpha + \text{ctn } \beta). \quad (4.10)$$

B. Tabelle 2–4 ($\varepsilon \neq 0$).

Vergleicht man in dem Tabellen die Zeilen, welche die Größe des abgelenkten Winkels wiedergeben, so sieht man, daß grundsätzlich die Abbeugungswinkel, zu denen man auf Grund der Snellius-Konstruktion kommt, mit den theoretisch richtigen Winkeln besser vereinbar sind. In den Fällen, in denen die auf Grund der Snellius-Konstruktion erhaltenen Abbeugungswinkel sich nicht vereinbaren lassen mit den theoretisch ermittelten Abbeugungswinkeln, trifft das gleiche für den Abbeugungswinkel zu, den die Krümmungsradiuskonstruktion liefert.

Somit ist auch hier die Entscheidung eindeutig zugunsten der auch praktisch einfacheren Snelliusschen Konstruktionsweise zu fallen.

Die Tabellen zeigen, daß der Abbeugungswinkel $\alpha - \beta$ numerisch bei der graphi-

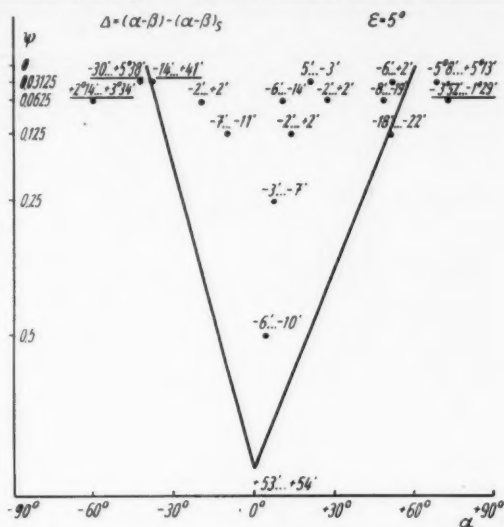


Abb. 7. Fehler des auf Grund der Snellius-Konstruktion gewonnenen Austrittswinkels im Falle nicht-paralleler Potentiallinien bei $\varepsilon = 5^\circ$

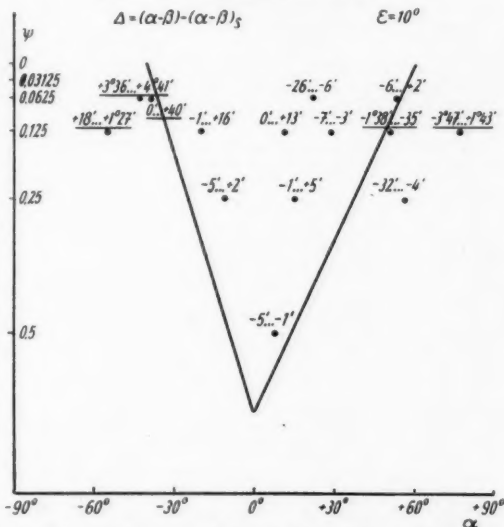


Abb. 8. Fehler des auf Grund der Snellius-Konstruktion gewonnenen Austrittswinkels im Falle nicht-paralleler Potentiallinien bei $\varepsilon = 10^\circ$

Tabelle 2. Brechung an nicht.

ψ $\varepsilon=5^\circ$	1	1/2	1/4
α β $\alpha-\beta$ $(\alpha-\beta)_0$ $(\alpha-\beta)_s$ γ' $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)_s$			
α β $\alpha-\beta$ $(\alpha-\beta)_0$ $(\alpha-\beta)_s$ γ' $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)_s$			
α β $\alpha-\beta$ $(\alpha-\beta)_0$ $(\alpha-\beta)_s$ γ' $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)_s$			
α β $\alpha-\beta$ $(\alpha-\beta)_0$ $(\alpha-\beta)_s$ γ' $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)_s$	$+2^\circ 30'$ — 53'... — 54' $+3^\circ 23' \dots +3^\circ 24'$ $+2^\circ 29'$ $+2^\circ 30'$ $+1^\circ 43' \dots +1^\circ 47'$ $+1^\circ 15'$	$+4^\circ 6' \dots +4^\circ 7'$ $+2^\circ 16' \dots +2^\circ 17'$ $+1^\circ 49' \dots +1^\circ 51'$ $+1^\circ 57' \dots +1^\circ 59'$ $+1^\circ 43' \dots +1^\circ 45'$ $+3^\circ 25' \dots +3^\circ 29'$ $+3^\circ 14' \dots +3^\circ 15'$	$+7^\circ 18' \dots +7^\circ 18'$ $+5^\circ 33' \dots +5^\circ 34'$ $+1^\circ 44' \dots +1^\circ 46'$ $+1^\circ 49' \dots +1^\circ 51'$ $+1^\circ 39' \dots +1^\circ 41'$ $+6^\circ 14' \dots +6^\circ 26'$ $+6^\circ 28' \dots +6^\circ 29'$
α β $\alpha-\beta$ $(\alpha-\beta)_0$ $(\alpha-\beta)_s$ γ' $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)_s$			
α β $\alpha-\beta$ $(\alpha-\beta)_0$ $(\alpha-\beta)_s$ γ' $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)_s$			
α β $\alpha-\beta$ $(\alpha-\beta)_0$ $(\alpha-\beta)_s$ γ' $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)_s$			

parallelen Potentiallinien ($\epsilon = 5^\circ$)

φ $\epsilon = 5^\circ$	1/8	1/16	1/32
α		$-50^\circ 59' \dots -51^\circ 12'$	$-42^\circ 22' \dots -43^\circ 20'$
β		$-48^\circ 5' \dots -48^\circ 30'$	$-41^\circ 36' \dots -43^\circ 20'$
$\alpha - \beta$		$-2^\circ 29' \dots -3^\circ 7'$	$+1^\circ 8' \dots -1^\circ 54'$
$(\alpha - \beta)_0$		$-5^\circ 20' \dots -6^\circ 1'$	$-1^\circ 19' \dots -4^\circ 26'$
$(\alpha - \beta)_s$		$-5^\circ 21' \dots -6^\circ 3'$	$-1^\circ 24' \dots -4^\circ 20'$
γ		$-45^\circ 41' \dots -46^\circ 31'$	$-41^\circ 49' \dots -44^\circ 29'$
$\frac{1}{2}(\alpha + \beta)_s$		$-49^\circ 8' \dots -49^\circ 59'$	$-2^\circ 1' \dots -43^\circ 34'$
α			$-38^\circ 45' \dots -39'$
β			$-37^\circ 33' \dots -37^\circ 43'$
$\alpha - \beta$			$-1^\circ 2' \dots -1^\circ 27'$
$(\alpha - \beta)_0$			$-1^\circ 8' \dots -1^\circ 38'$
$(\alpha - \beta)_s$			$-1^\circ 13' \dots -1^\circ 43'$
γ			$-37^\circ 32' \dots -37^\circ 44'$
$\frac{1}{2}(\alpha + \beta)_s$			$-38^\circ 1' \dots -38^\circ 16'$
α	$-10^\circ 15' \dots -10^\circ 16'$	$-19^\circ 45' \dots -19^\circ 45'$	
β	$-8^\circ 57' \dots -8^\circ 58'$	$-18^\circ 30' \dots -18^\circ 31'$	
$\alpha - \beta$	$-1^\circ 17' \dots -1^\circ 19'$	$-1^\circ 14' \dots -1^\circ 16'$	
$(\alpha - \beta)_0$	$-1^\circ 16' \dots -1^\circ 18'$	$-1^\circ 14' \dots -1^\circ 16'$	
$(\alpha - \beta)_s$	$-1^\circ 8' \dots -1^\circ 10'$	$-1^\circ 11' \dots -1^\circ 13'$	
γ	$-9^\circ 46' \dots -9^\circ 58'$	$-19^\circ 13' \dots -19^\circ 31'$	
$\frac{1}{2}(\alpha + \beta)_s$	$-9^\circ 41' \dots -9^\circ 42'$	$-19^\circ 9' \dots -19^\circ 10'$	
α		$+10^\circ 46' \dots +10^\circ 48'$	
β		$+10^\circ 7' \dots +10^\circ 9'$	
$\alpha - \beta$		$+37' \dots +41'$	
$(\alpha - \beta)_0$		$+38' \dots +42'$	
$(\alpha - \beta)_s$		$+27' \dots +31'$	
γ		$+10^\circ 32' \dots +10^\circ 44'$	
$\frac{1}{2}(\alpha + \beta)_s$		$+10^\circ 32' \dots +10^\circ 34'$	
α	$+13^\circ 54' \dots +13^\circ 55'$	$+27^\circ 15' \dots +27^\circ 16'$	$+21^\circ 23' \dots +21^\circ 24'$
β	$+12^\circ 12' \dots +12^\circ 13'$	$+25^\circ 30' \dots +25^\circ 31'$	$+20^\circ 47' \dots +20^\circ 48'$
$\alpha - \beta$	$+1^\circ 41' \dots +1^\circ 43'$	$+1^\circ 44' \dots +1^\circ 46'$	$+35' \dots +37'$
$(\alpha - \beta)_0$	$+1^\circ 46' \dots +1^\circ 48'$	$+1^\circ 51' \dots +1^\circ 53'$	$+42' \dots +44'$
$(\alpha - \beta)_s$	$+1^\circ 41' \dots +1^\circ 43'$	$+1^\circ 44' \dots +1^\circ 46'$	$+42' \dots +44'$
γ	$+13^\circ 6' \dots +13^\circ 24'$	$+26^\circ 0' \dots +26^\circ 16'$	$+20^\circ 18' \dots +20^\circ 37'$
$\frac{1}{2}(\alpha + \beta)_s$	$+13^\circ 3' \dots +13^\circ 4'$	$+26^\circ 23' \dots +26^\circ 24'$	$+21^\circ 2' \dots +21^\circ 3'$
α	$+50^\circ 45' \dots +50^\circ 46'$	$+48^\circ 36' \dots +48^\circ 37'$	$+51^\circ 54' \dots +51^\circ 56'$
β	$+43^\circ 18' \dots +43^\circ 19'$	$+44^\circ 54' \dots +45^\circ 2'$	$+49^\circ 42' \dots +49^\circ 44'$
$\alpha - \beta$	$+7^\circ 26' \dots +7^\circ 28'$	$+3^\circ 34' \dots +3^\circ 43'$	$+2^\circ 10' \dots +2^\circ 14'$
$(\alpha - \beta)_0$	$+8^\circ 27' \dots +8^\circ 29'$	$+4^\circ 5' \dots +4^\circ 7'$	$+2^\circ 19' \dots +2^\circ 23'$
$(\alpha - \beta)_s$	$+7^\circ 46' \dots +7^\circ 48'$	$+3^\circ 51' \dots +3^\circ 53'$	$+2^\circ 12' \dots +2^\circ 16'$
γ	$+47^\circ 6' \dots +48^\circ 6'$	$+45^\circ 55' \dots +46^\circ 19'$	$+49^\circ 56' \dots +50^\circ 56'$
$\frac{1}{2}(\alpha + \beta)_s$	$+46^\circ 52' \dots +46^\circ 53'$	$+46^\circ 40' \dots +46^\circ 41'$	$+50^\circ 47' \dots +50^\circ 49'$
α		$+72^\circ 24' \dots +74^\circ 24'$	$+68^\circ 0' \dots +70^\circ 0'$
β		$+64^\circ 0' \dots +65^\circ 0'$	$+63^\circ 15' \dots +66^\circ 15'$
$\alpha - \beta$		$+7^\circ 24' \dots +10^\circ 24'$	$+1^\circ 45' \dots +6^\circ 45'$
$(\alpha - \beta)_0$		$+8^\circ 10' \dots +10^\circ 43'$	$+1^\circ 38' \dots +6^\circ 43'$
$(\alpha - \beta)_s$		$+8^\circ 55' \dots +11^\circ 16'$	$+1^\circ 32' \dots +6^\circ 51'$
γ		$+67^\circ 34' \dots +68^\circ 54'$	$+65^\circ 32' \dots +66^\circ 52'$
$\frac{1}{2}(\alpha + \beta)_s$		$+68^\circ 21' \dots +69^\circ 47'$	$+65^\circ 33' \dots +68^\circ 13'$

Tabelle 3. Brechung an nicht-

ψ $\varepsilon=10^\circ$	1	1/2	1/4
α β $\alpha-\beta$ $(\alpha-\beta)_0$ $(\alpha-\beta)_s$ γ $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)_s$			
α β $\alpha-\beta$ $(\alpha-\beta)_0$ $(\alpha-\beta)_s$ γ $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)_s$			
α β $\alpha-\beta$ $(\alpha-\beta)_0$ $(\alpha-\beta)_s$ γ $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)_s$			$-11^\circ 21' \dots -11^\circ 23'$ $-8^\circ 45' \dots -8^\circ 46'$ $-2^\circ 35' \dots -2^\circ 38'$ $-2^\circ 26' \dots -2^\circ 30'$ $-2^\circ 33' \dots -2^\circ 37'$ $-9^\circ 44' \dots -9^\circ 56'$ $-10^\circ 2' \dots -10^\circ 6'$
α β $\alpha-\beta$ $(\alpha-\beta)_0$ $(\alpha-\beta)_s$ γ $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)_s$	$+5^\circ$ $+1^\circ 27' \dots +1^\circ 28'$ $+3^\circ 32' \dots +3^\circ 33'$ $+5^\circ 2'$ $+5^\circ 0'$ $+3^\circ 10' \dots +3^\circ 20'$ $+2^\circ 30'$	$+8^\circ 12' \dots +8^\circ 13'$ $+4^\circ 45' \dots +4^\circ 46'$ $+3^\circ 26' \dots +3^\circ 28'$ $+4^\circ 8' \dots +4^\circ 10'$ $+3^\circ 29' \dots +3^\circ 31'$ $+6^\circ 23' \dots +6^\circ 33'$ $+6^\circ 27' \dots +6^\circ 28'$	$+14^\circ 45' \dots +14^\circ 46'$ $+11^\circ 21' \dots +11^\circ 22'$ $+3^\circ 23' \dots +3^\circ 25'$ $+3^\circ 48' \dots +3^\circ 50'$ $+3^\circ 20' \dots +3^\circ 22'$ $+13^\circ 15' \dots +13^\circ 23'$ $+13^\circ 5' \dots +13^\circ 6'$
α β $\alpha-\beta$ $(\alpha-\beta)_0$ $(\alpha-\beta)_s$ γ $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)_s$			
α β $\alpha-\beta$ $(\alpha-\beta)_0$ $(\alpha-\beta)_s$ γ $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)_s$			$+55^\circ 57' \dots +56^\circ 21'$ $+40^\circ 12' \dots +40^\circ 13'$ $+15^\circ 44' \dots +16^\circ 9'$ $+12^\circ 17' \dots +12^\circ 19'$ $+16^\circ 13' \dots +16^\circ 16'$ $+46^\circ 1' \dots +47^\circ 1'$ $+48^\circ 19' \dots +48^\circ 21'$
α β $\alpha-\beta$ $(\alpha-\beta)_0$ $(\alpha-\beta)_s$ α $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)_s$			

parallelen Potentiallinien ($\varepsilon = 10^\circ$)

ψ $s=10^\circ$	1/8	1/16	1/32
α	$-55^\circ 9' \dots -55^\circ 12'$	$-43^\circ 10' \dots -44^\circ$	
β	$-46^\circ 48' \dots -47^\circ 48'$	$-41^\circ 24' \dots -43^\circ 36'$	
$\alpha-\beta$	$-7^\circ 21' \dots -8^\circ 24'$	$-2^\circ 36' \dots -26'$	
$(\alpha-\beta)_0$	$-8^\circ 21' \dots -8^\circ 27'$	$-4^\circ 3' \dots -6^\circ 41'$	
$(\alpha-\beta)_s$	$-8^\circ 42' \dots -8^\circ 48'$	$-4^\circ 2' \dots -7^\circ 17'$	
γ	$-49^\circ 22' \dots -50^\circ 22'$	$-42^\circ 46' \dots -43^\circ 34'$	
$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)_s$	$-50^\circ 46' \dots -50^\circ 50'$	$-42^\circ 22' \dots -43^\circ 59'$	
α		$-39^\circ 18' \dots -39^\circ 48'$	
β		$-37^\circ 0' \dots -37^\circ 3'$	
$\alpha-\beta$		$-2^\circ 15' \dots -2^\circ 48'$	
$(\alpha-\beta)_0$		$-2^\circ 54' \dots -3^\circ 1'$	
$(\alpha-\beta)_s$		$-2^\circ 48' \dots -2^\circ 55'$	
γ		$-37^\circ 36' \dots -38^\circ 12'$	
$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)_s$		$-38^\circ 26' \dots -38^\circ 29'$	
α	$-20^\circ 39' \dots -20^\circ 41'$		
β	$-18^\circ 9' \dots -18^\circ 10'$		
$\alpha-\beta$	$-2^\circ 19' \dots -2^\circ 32'$		
$(\alpha-\beta)_0$	$-2^\circ 34' \dots -2^\circ 38'$		
$(\alpha-\beta)_s$	$-2^\circ 31' \dots -2^\circ 35'$		
γ	$-19^\circ 33' \dots -19^\circ 41'$		
$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)_s$	$-19^\circ 23' \dots -19^\circ 25'$		
α	$+10^\circ 59' \dots +11^\circ 0'$		
β	$+9^\circ 29' \dots +9^\circ 39'$		
$\alpha-\beta$	$+1^\circ 20' \dots +1^\circ 31'$		
$(\alpha-\beta)_0$	$+1^\circ 24' \dots +1^\circ 26'$		
$(\alpha-\beta)_s$	$+1^\circ 18' \dots +1^\circ 20'$		
γ	$+10^\circ 2' \dots +10^\circ 10'$		
$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)_s$	$+10^\circ 20' \dots +10^\circ 21'$		
α	$+28^\circ 3' \dots +28^\circ 4'$	$+21^\circ 38' \dots +21^\circ 39'$	
β	$+24^\circ 36' \dots +24^\circ 37'$	$+20^\circ 25' \dots +20^\circ 42'$	
$\alpha-\beta$	$+3^\circ 26' \dots +3^\circ 28'$	$+0^\circ 56' \dots +1^\circ 14'$	
$(\alpha-\beta)_0$	$+3^\circ 49' \dots +3^\circ 51'$	$+1^\circ 19' \dots +1^\circ 21'$	
$(\alpha-\beta)_s$	$+3^\circ 31' \dots +3^\circ 33'$	$+1^\circ 20' \dots +1^\circ 22'$	
γ	$+26^\circ 4' \dots +26^\circ 10'$	$+20^\circ 28' \dots +21^\circ 16'$	
$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)_s$	$+26^\circ 17' \dots +26^\circ 18'$	$+20^\circ 58' \dots +20^\circ 59'$	
α	$+50^\circ 36' \dots +50^\circ 37'$	$+52^\circ 57' \dots +52^\circ 59'$	
β	$+43^\circ 36' \dots +44^\circ 36'$	$+48^\circ 33' \dots +48^\circ 35'$	
$\beta-\alpha$	$+6^\circ 0' \dots +7^\circ 1'$	$+4^\circ 22' \dots +4^\circ 26'$	
$(\alpha-\beta)_0$	$+8^\circ 48' \dots +8^\circ 50'$	$+4^\circ 59' \dots +5^\circ 3'$	
$(\alpha-\beta)_s$	$+7^\circ 36' \dots +7^\circ 38'$	$+4^\circ 24' \dots +4^\circ 28'$	
γ	$+46^\circ 1' \dots +46^\circ 49'$	$+50^\circ 20' \dots +50^\circ 50'$	
$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)_s$	$+46^\circ 48' \dots +46^\circ 49'$	$+50^\circ 44' \dots +50^\circ 46'$	
α	$+77^\circ 3' \dots +82^\circ 3'$		
β	$+60^\circ 24' \dots +60^\circ 30'$		
$\alpha-\beta$	$+16^\circ 33' \dots +21^\circ 39'$		
$(\alpha-\beta)_0$	$+13^\circ 9' \dots +13^\circ 26'$		
$(\alpha-\beta)_s$	$+19^\circ 56' \dots +20^\circ 20'$		
γ	$+67^\circ 16' \dots +68^\circ 36'$		
$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)_s$	$+70^\circ 24' \dots +70^\circ 37'$		

Tabelle 4. Brechung an nicht-

φ $\epsilon = 26^\circ$	1	1/2	1/4
α β $\alpha - \beta$ $(\alpha - \beta)_0$ $(\alpha - \beta)_s$ γ $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)_s$			
α β $\alpha - \beta$ $(\alpha - \beta)_0$ $(\alpha - \beta)_s$ γ $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)_s$			$-22^\circ 54' \dots -23^\circ 9'$ $-17^\circ 36' \dots -17^\circ 37'$ $-5^\circ 17' \dots -5^\circ 35'$ $-4^\circ 55' \dots -4^\circ 58'$ $-5^\circ 11' \dots -5^\circ 24'$ $-19^\circ 29' \dots -19^\circ 37'$ $-20^\circ 17' \dots -20^\circ 19'$
α β $\alpha - \beta$ $(\alpha - \beta)_0$ $(\alpha - \beta)_s$ γ $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)_s$		$-15^\circ 6' \dots -15^\circ 34'$ $-8^\circ 45' \dots -8^\circ 46'$ $-6^\circ 20' \dots -6^\circ 49'$ $-4^\circ 35' \dots -4^\circ 38'$ $-6^\circ 31' \dots -6^\circ 34'$ $-9^\circ 52' \dots -9^\circ 58'$ $-12^\circ 1' \dots -12^\circ 3'$	
α β $\alpha - \beta$ $(\alpha - \beta)_0$ $(\alpha - \beta)_s$ γ $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)_s$	$+10^\circ$ $+3^\circ \dots +3^\circ 1'$ $+7^\circ \dots +6^\circ 59'$ $+10^\circ 9'$ $+10^\circ 0'$ $+6^\circ 46' \dots +6^\circ 50'$ $+5^\circ$	$+16^\circ 27' \dots +16^\circ 28'$ $+9^\circ 42' \dots +9^\circ 43'$ $+6^\circ 44' \dots +6^\circ 46'$ $+8^\circ 37' \dots +8^\circ 39'$ $+7^\circ 2' \dots +7^\circ 4'$ $+13^\circ 19' \dots +13^\circ 23'$ $+12^\circ 56' \dots +12^\circ 57'$	
α β $\alpha - \beta$ $(\alpha - \beta)_0$ $(\alpha - \beta)_s$ γ $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)_s$			$+29^\circ 42' \dots +29^\circ 43'$ $+22^\circ 48' \dots +22^\circ 49'$ $+6^\circ 53' \dots +6^\circ 55'$ $+8^\circ 34' \dots +8^\circ 36'$ $+7^\circ 7' \dots +7^\circ 9'$ $+26^\circ 9' \dots +26^\circ 13'$ $+26^\circ 9' \dots +26^\circ 9'$
α β $\alpha - \beta$ $(\alpha - \beta)_0$ $(\alpha - \beta)_s$ γ $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)_s$			
α β $\alpha - \beta$ $(\alpha - \beta)_0$ $(\alpha - \beta)_s$ γ $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)_s$		$+69^\circ 18' \dots +71^\circ 24'$ $+35^\circ 3' \dots +35^\circ 4'$ $+34^\circ 14' \dots +36^\circ 21'$ $+19^\circ 47' \dots +19^\circ 53'$ $+48^\circ 25' \dots +49^\circ 13'$ $+47^\circ 46' \dots +48^\circ 16'$ $+59^\circ 16' \dots +59^\circ 38'$	

parallelen Potentiallinien ($\varepsilon = 20^\circ$)

ψ $\varepsilon = 20^\circ$	1/8	1/16	1/32
α	$-40^\circ 39' \dots -41^\circ 29'$		
β	$-36^\circ 12' \dots -36^\circ 13'$		
$\alpha - \beta$	$-4^\circ 26' \dots -5^\circ 17'$		
$(\alpha - \beta)_0$	$-6^\circ 23' \dots -6^\circ 26'$		
$(\alpha - \beta)_s$	$-5^\circ 49' \dots -5^\circ 52'$		
γ	$-38^\circ 23' \dots -38^\circ 33'$		
$\frac{1}{2}(\alpha + \beta)_s$	$-39^\circ 7' \dots -39^\circ 9'$		
α			
β			
$\alpha - \beta$			
$(\alpha - \beta)_0$			
$(\alpha - \beta)_s$			
γ			
$\frac{1}{2}(\alpha + \beta)_s$			
α			
β			
$\alpha - \beta$			
$(\alpha - \beta)_0$			
$(\alpha - \beta)_s$			
γ			
$\frac{1}{2}(\alpha + \beta)_s$			
α	$+22^\circ 5' \dots +22^\circ 6'$		
β	$+19^\circ 0' \dots +19^\circ 48'$		
$\alpha - \beta$	$+2^\circ 17' \dots +3^\circ 6'$		
$(\alpha - \beta)_0$	$+3^\circ 4' \dots +3^\circ 6'$		
$(\alpha - \beta)_s$	$+2^\circ 40' \dots +2^\circ 42'$		
γ	$+20^\circ 53' \dots +20^\circ 57'$		
$\frac{1}{2}(\alpha + \beta)_s$	$+20^\circ 45' \dots +20^\circ 46'$		
α			
β			
$\alpha - \beta$			
$(\alpha - \beta)_0$			
$(\alpha - \beta)_s$			
γ			
$\frac{1}{2}(\alpha + \beta)_s$			
α	$+55^\circ 6' \dots +55^\circ 8'$		
β	$+46^\circ 12' \dots +46^\circ 24'$		
$\alpha - \beta$	$+8^\circ 20' \dots +8^\circ 30'$		
$(\alpha - \beta)_0$	$+11^\circ 21' \dots +11^\circ 25'$		
$(\alpha - \beta)_s$	$+8^\circ 43' \dots +8^\circ 47'$		
γ	$+49^\circ 21' \dots +49^\circ 33'$		
$\frac{1}{2}(\alpha + \beta)_s$	$+50^\circ 44' \dots +50^\circ 46'$		

in den Abbildungen Abgrenzungslinien eingezeichnet. Der Innenraum dieser Figuren kennzeichnet die ε -, α - und ψ -Werte, bei denen die Snellius-Konstruktion zweifelsfrei die angestrebte Genauigkeit von $< \frac{1}{2}^\circ$ sicherstellt. Außerhalb dieser Bereiche ist an sich die Rechengenauigkeit der meisten theoretisch ermittelten Werte zu gering, als daß man in ihnen eine Bestätigung der Berechtigung der Snellius-Konstruktion sehen könnte. Einige der im Außenraum der dreiecksförmigen Figuren liegenden Werte — sie sind durch Unterstreichen gekennzeichnet — weisen ziemlich eindeutig darauf hin, daß bei einer derartigen Wahl von α -, ψ - und ε -Werten die Snellius-Konstruktion ihre Berechtigung verliert. Bezüglich der Werte für den Winkel γ , welcher die Lage des Austrittspunktes auf der Äquipotentiallinie II bestimmt, wurde ähnlich verfahren. Abb. 10 bis 12 zeigen für die Werte $\varepsilon = 5, 10, 20^\circ$ die Abweichungen, welche sich bei verschiedenen Eintrittswinkeln α und verschiedenen Werten ψ hinsichtlich des Winkels γ ergeben, und zwar sind die Abweichungen angegeben, welche zwischen dem gemäß Gl. (4.16) berechneten „theoretischen“ Wert und dem als arithmetischem Mittel zwischen Eintritts- und Austrittswinkel gemäß Gl. (3.10) erhaltenen Wert auftreten. Es sind auch

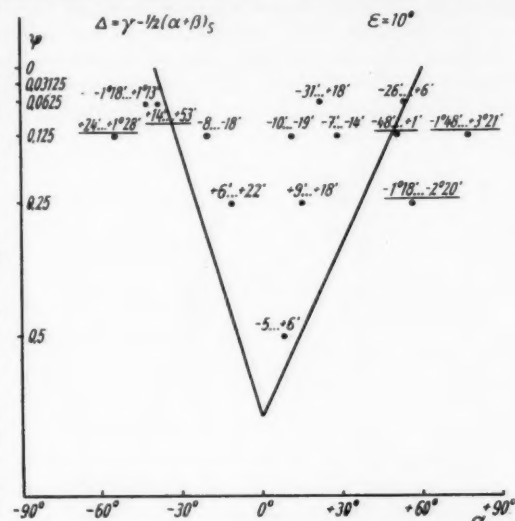


Abb. 11. Winkelfehler der Konstruktion des Austritts-ortes im Falle nicht-paralleler Potentiallinien bei $\varepsilon = 10^\circ$

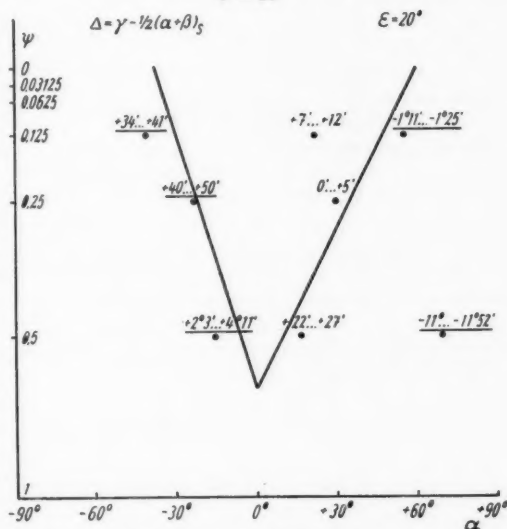


Abb. 12. Winkelfehler der Konstruktion des Austritts-ortes im Falle nicht-paralleler Potentiallinien bei $\varepsilon = 20^\circ$

hier entsprechende Bereichsgrenzen eingezeichnet, außerhalb derer die Bestimmung des Winkelwertes γ unzulässige Fehler nach sich zieht.

Die durch die Abb. 7–9 bzw. 10–12 charakterisierten Bereichsgrenzen sind in Abb. 13 übereinander gezeichnet wiedergegeben. In Abb. 13 ist auch zusätzlich die sich aus Tabelle 2 ergebende Bereichsgrenze mit aufgenommen, die ihre Be-

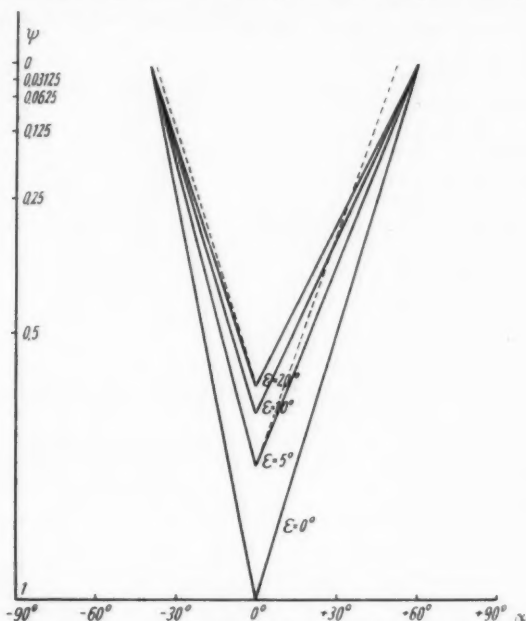


Abb. 13. Zur Erzielung von Konstruktionsfehlern kleiner $\frac{1}{2}^\circ$ einzuhaltende Grenzbedingungen

gründung nur in der Ungenauigkeit der Bestimmung des Winkels α hat, da ja für $\epsilon = 0$ an sich die Snellius-Konstruktion bei allen Werten ψ und α korrekt ist. Hält man sich also bei einer graphischen Konstruktion innerhalb der in Abb. 13 angegebenen Grenzen, so kann man eine hinreichende Zeichengenauigkeit für jeden einzelnen Brechungsprozeß zwischen zwei aufeinanderfolgenden Potentiallinien erwarten. Überschreitet man jedoch diese Grenzen, so ist hinreichende Genauigkeit nicht gewährleistet.

Berlin-Adlershof, Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung.

(Bei der Redaktion eingegangen am 25. November 1952.)

Zur Dublettaufspaltung von Alkalitermen

Von H. Wagenbreth

(Mit 1 Abbildung)

Inhaltsübersicht

Unter Verwendung Hartree-Fockscher Eigenfunktionen wird die Dublettaufspaltung für einige Terme von Natrium, Silizium IV (Si^{3+}) und Calcium II (Ca^+) mit Berücksichtigung des Elektronenaustausches berechnet.

Allgemeines

Es ist verschiedentlich versucht worden, die anomal kleinen und die umgekehrten Dublettaufspaltungen mancher Alkaliterme durch die Austauschwechselwirkung des Leuchtelektrons mit den Rumpfelektronen zu erklären. Zuerst untersuchten M. H. Johnson und G. Breit¹⁾ die Dublettaufspaltung des $4f$ -Terms von Caesium und fanden durch numerische Abschätzung, daß die Austauschwechselwirkung tausendmal zu klein ist, um die experimentell beobachtete Umkehrung des Dubletts hervorrufen zu können. Hingegen ergab die Berechnung der anomal kleinen Dublettaufspaltung des $2p$ -Terms von Lithium durch E. David²⁾, daß in diesem Falle durch die Berücksichtigung der Austauschwechselwirkung eine befriedigende Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert erreicht wird. Da der Mißerfolg von Johnson und Breit überdies später der Ungenauigkeit ihrer Berechnungen zugeschrieben wurde³⁾, schien es von Interesse zu sein, die Dublettaufspaltung für einige weitere Terme zu berechnen, um den Einfluß des Elektronenaustausches insbesondere auf die anomal kleinen und die umgekehrten Dublettintervalle festzustellen.

Einen Überblick über die experimentellen Dublettintervalle kann man sich mit Hilfe der von Landé⁴⁾ angegebenen Formel

$$\Delta\nu = \frac{R \alpha^2 Z_i^2 \cdot Z_a^2}{n_{\text{eff}}^3 l(l+1)}$$

verschaffen, die der Sommerfeldschen Formel für die Feinstruktur des Wasserstoffs ganz analog ist. Z_i ist die effektive Kernladung auf dem inneren und Z_a diejenige auf dem äußeren Teil der „Bahn des Leuchtelektrons“. Die übrigen Buchstaben haben die übliche Bedeutung. Es ist $Z_a = 1, 2, 3, \dots$ für neutrale, einfach ionisierte, zweifach ionisierte Atome usw. Setzt man für die Dublettaufspaltung $\Delta\nu$ und für n_{eff} die experimentellen Werte ein, so kann man für jeden Term

¹⁾ M. H. Johnson jr. u. G. Breit, *Physic. Rev.* **44**, 77 (1933).

²⁾ E. David, *Z. Physik* **91**, 289 (1934).

³⁾ V. Fock, *J. exper. theor. Phys.* **5**, 891 (1935).

⁴⁾ A. Landé, *Z. Physik* **25**, 46 (1924).

das zugehörige Z_i berechnen. In Abb. 1 sind die so erhaltenen Z_i -Werte bzw. die entsprechenden $(Z_i - Z_a)$ -Werte in Abhängigkeit von der Kernladungszahl Z für einige Terme von Natrium und den dem Natrium elektronengleichen Ionen dargestellt. Die Z_i -Werte für p -Terme liegen sehr gut auf einer Kurve in dem für Z_i „erlaubten Gebiet“ zwischen Z und Z_a . Für die meisten $4f$ -Terme ergibt sich, wie man es bei einer „Kreisbahn“ erwarten muß, $Z_i = Z_a$. Die anomal kleinen Dubletts erkennt man daran, daß sich für sie Z_i kleiner als Z_a ergibt.

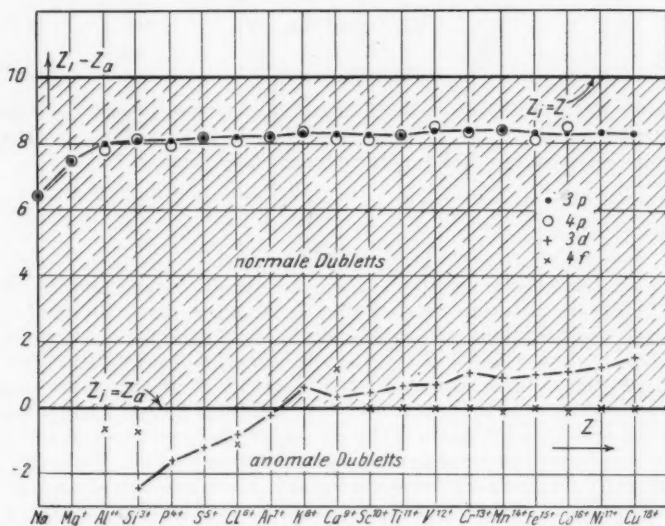


Abb. 1. Darstellung der Differenz zwischen innerer und äußerer effektiver Kernladungszahl in Abhängigkeit von der Kernladungszahl Z für einige Terme von Natrium und dem Natrium ähnlichen Ionen zur Unterscheidung von normalen und anomal kleinen Werten für die Dublettaufspaltung (vgl. Text)

Zur Berechnung der Dublettaufspaltung mußte zunächst ein Ausdruck für den von der Austauschwechselwirkung des Leuchtelektrons mit den p -Schalen des Rumpfes herrührenden Beitrag hergeleitet werden. Aus der ersten Näherung der Störungstheorie mit dem Breitischen Hamilton-Operator für Spinelektronen⁵⁾ ergab sich der unter (4) aufgeführte Ausdruck. Dabei steht \mathcal{Q} für den Radialanteil $P_{n_i}(r)$ der Eigenfunktion des Leuchtelektrons

$$\psi_{nims} = \frac{1}{r} P_{n_i}(r) \cdot Y_{lm}(\theta, \varphi) \cdot \text{Spinfunktion},$$

und entsprechend \mathcal{R} für den Radialanteil $P_{n'l'}(r)$ der Eigenfunktionen einer Elektronenschale des Rumpfes. Es werden atomare Einheiten verwendet. Die Ausdrücke für den Beitrag der Wechselwirkung des Leuchtelektrons mit dem Kern, der klassischen Wechselwirkung mit den inneren Elektronenschalen und der Aus-

⁵⁾ H. Bethe, Handbuch der Phys. Bd. XXIV/1, 2. Aufl., S. 378.

tauschwechselwirkung mit den inneren s -Schalen wurden von David³⁾ übernommen, der letztere in etwas abgewandelter Form. Sie seien deshalb hier mit aufgeführt.

Beitrag der Wechselwirkung des Leuchtelektrons mit dem Kern:

$$\varepsilon^K = \frac{\alpha^2}{4} (2l+1) Z \int_0^\infty \frac{\mathfrak{R}^2}{r^3} dr. \quad (1)$$

Beitrag der klassischen Wechselwirkung mit den inneren Elektronenschalen:

$$\varepsilon^{kl} = -\frac{\alpha^2}{4} (2l+1) \int_0^\infty \frac{\mathfrak{R}^2}{r^3} dr \int_0^r \sum_{n'l'} 2(2l'+1) \mathfrak{R}_{n'l'}^2 dr'. \quad (2)$$

Beitrag der Austauschwechselwirkung mit einer inneren s -Schale:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s^A = & -\frac{3}{2} \alpha^2 \left\{ \int_0^\infty \mathfrak{R} \frac{d\mathfrak{R}}{dr} dr \left[\frac{1}{r^{l+2}} \int_0^r \mathfrak{R} \mathfrak{Q} r'^l dr' + r^{l-1} \int_r^\infty \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{Q}}{r'^{l+1}} dr' \right] \right. \\ & \left. - \int_0^\infty \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{Q}}{r} dr \left[\frac{l+1}{r^{l+2}} \int_0^r \mathfrak{R} \mathfrak{Q} r'^l dr' - l r^{l-1} \int_r^\infty \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{Q}}{r'^{l+1}} dr' \right] \right\}. \quad (3) \end{aligned}$$

Beitrag der Austauschwechselwirkung mit einer inneren p -Schale:

$$\begin{aligned} \varepsilon_p^A = & -\frac{9}{2} \alpha^2 \left\{ \int_0^\infty \mathfrak{R} \frac{d\mathfrak{R}}{dr} dr \left[\frac{l-1}{2l-1} \frac{1}{r^{l+1}} \int_0^r \mathfrak{R} \mathfrak{Q} r'^{l-1} dr' \right. \right. \\ & + \frac{l+2}{2l+3} \frac{1}{r^{l+3}} \int_0^r \mathfrak{R} \mathfrak{Q} r'^{l+1} dr' + \frac{l-1}{2l-1} r^{l-2} \int_r^\infty \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{Q}}{r'^l} dr' + \frac{l+2}{2l+3} r^l \int_r^\infty \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{Q}}{r'^{l+2}} dr' \left. \right] \\ & - \int_0^\infty \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{Q}}{r^{l+2}} dr \int_0^r \mathfrak{R} \mathfrak{Q} r'^{l-1} dr' - \frac{(l+1)(l+2)}{2l+3} \int_0^\infty \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{Q}}{r^{l+4}} dr \int_0^r \mathfrak{R} \mathfrak{Q} r'^{l+1} dr' \\ & \left. + \frac{l(l-1)}{2l-1} \int_0^\infty \mathfrak{R} \mathfrak{Q} r^{l-3} dr \int_r^\infty \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{Q}}{r'^l} dr' \right\}. \quad (4) \end{aligned}$$

Die Dublettaufspaltung ε ergibt sich durch Summierung der angeführten Ausdrücke, wobei der Beitrag zur Austauschwechselwirkung für jede Elektronenschale des Rumpfes einzeln zu berechnen ist. Die Formeln reichen aus, soweit noch keine inneren d -Schalen vorkommen.

Ergebnisse der numerischen Berechnungen

1. Natrium. Dublettaufspaltung ε des $4p$ -Terms unter Verwendung der von Fock und Petrashen⁴⁾ berechneten Eigenfunktionen des self consistent field mit Austausch:

ε^K	ε^{kl}	ε_{1s}^A	ε_{2s}^A	ε_{2p}^A	ε	$\varepsilon_{\text{exp.}}$
+5,0 ₇	-1,0 ₈	-0,5 ₈	+0,0 ₇	+0,2 ₄	3,8	5,5 cm ⁻¹

⁴⁾ V. Fock u. M. J. Petrashen, Physik. Z. d. Sowjetunion 6, 368 (1934).

Die Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert ist nicht sehr gut, aber immerhin etwas besser als für den $3p$ -Term, der früher⁷⁾ berechnet worden ist.

2. Silizium IV (Si^{3+}). Der $3d$ -Term des Si^{3+} hat eine anomal kleine Dublettaufspaltung, wie man aus Abb. 1 ersieht, da der zugehörige Z_i -Wert kleiner als Z_a ist. $\epsilon^K + \epsilon^{kl}$ wurde bereits von W. Hartree, D. R. Hartree und M. F. Manning⁸⁾ angegeben, die auch die hier zur Berechnung des Beitrages der Austauschwechselwirkung zur Dublettaufspaltung verwendeten Eigenfunktionen des self consistent field mit Austausch berechnet haben. Es ergab sich:

$\epsilon^K + \epsilon^{kl}$	ϵ_{1s}^A	ϵ_{2s}^A	ϵ_{2p}^A	ϵ	$\epsilon_{\text{exp.}}$
19	$-0,1_2$	$-1,6_5$	$-2,3_1$	14	$1,57 \text{ cm}^{-1}$

Die Austauschglieder sind also zwar von beträchtlichem Einfluß auf den theoretischen Wert für die Dublettaufspaltung, sie reichen aber bei weitem nicht aus, um den anomal kleinen experimentellen Wert zu erklären.

Auch die Aufspaltung des $4f$ -Terms von Si^{3+} ist anomal klein, wie Abb. 1 zeigt. Es ist $\epsilon_{\text{exp.}} = 1,3 \text{ cm}^{-1}$. $\epsilon^K + \epsilon^{kl}$ wurde von W. Hartree, D. R. Hartree und M. F. Manning zu $2,3 \text{ cm}^{-1}$ berechnet. Eine Überschlagsrechnung ergab $\epsilon_{2p}^A \approx -0,03 \text{ cm}^{-1}$, so daß insgesamt $\epsilon^A \approx -0,05 \text{ cm}^{-1}$ sein dürfte. Auch in diesem Falle ergibt sich also eine relativ beträchtliche Abweichung des theoretischen Wertes vom experimentellen. Die Austauschglieder ϵ^A haben hier jedoch so gut wie keine Bedeutung.

3. Calcium II (Ca^+). Um die Theorie auch einmal an einem etwas komplizierteren Atom unter Verwendung von Eigenfunktionen des Hartree-Fockschen self consistent field mit Austausch zu prüfen, wurde die Dublettaufspaltung der Terme $4p$ und $3d$ des Ca^+ berechnet. Die benötigten Eigenfunktionen wurden von D. R. Hartree und W. Hartree⁹⁾ angegeben. Wir erhielten:

Term	ϵ^K	ϵ^{kl}	ϵ_{1s}^A	ϵ_{2s}^A	ϵ_{2p}^A	ϵ_{3s}^A	ϵ_{3p}^A	ϵ	$\epsilon_{\text{exp.}}$
$4p$	$180,4_0$	$-20,7_3$	$-11,3_5$	$+1,0_3$	$+1,9_0$	$+0,1_7$	$+0,4_3$	$151,8$	$222,8$
$3d$	$173,7_2$	$-87,5_2$	$-0,4_8$	$-4,6_7$	$-11,7_3$	$-1,1_9$	$-2,2_6$	$65,9$	$60,8$

Für den $4p$ -Term ist die Abweichung zwischen dem theoretischen und dem experimentellen Wert relativ etwa die gleiche, wie sie schon bei den p -Termen von Lithium und Natrium gefunden wurde. Das Ergebnis für den $3d$ -Term ist verhältnismäßig gut. Das ist besonders deshalb bemerkenswert, weil sich gerade in diesem Falle die mit Berücksichtigung des Elektronenaustausches berechnete Eigenfunktion beträchtlich von der ohne Berücksichtigung des Austausches berechneten unterscheidet und auch die Austauschglieder ϵ^A in der Formel für die Dublettaufspaltung relativ groß sind. Mit Hartree-Funktionen ohne Austausch⁹⁾ und bei Vernachlässigung der Austauschglieder ϵ^A würde sich für die Dublettaufspaltung des $3d$ -Terms 23 cm^{-1} ergeben.

⁷⁾ B. Kockel u. H. Wagenbreth, Ann. Physik 9, 1 (1951). Der $3p$ -Term von Natrium wurde schon von Fock a. a. O. zu $8,5 \text{ cm}^{-1}$ berechnet, wie uns erst neuerdings bekannt wurde, während wir $9,6 \text{ cm}^{-1}$ erhielten. Die beiden Ausgangsformeln sind äquivalent. Da Fock nur das Endergebnis mitteilt, waren die Berechnungen nicht im einzelnen zu vergleichen.

⁸⁾ W. Hartree, D. R. Hartree u. M. F. Manning, Physic. Rev. 60, 857 (1941).

⁹⁾ D. R. Hartree u. W. Hartree, Proc. Roy. Soc. London (A) 164, 167 (1938).

Zusammenfassung

Die anomal kleinen Dubletts lassen sich im allgemeinen nicht durch Austausch-
effekte erklären, wenn auch in manchen Fällen die Berücksichtigung der Austausch-
wechselwirkung eine nicht unerhebliche Verbesserung des theoretischen Auf-
spaltungswertes mit sich bringt. Bei Verwendung Hartree-Fockscher Eigen-
funktionen ergeben p -Terme allgemein um 30 bis 40% zu kleine Aufspaltungs-
werte. Für den $3d$ -Term von Calcium II erhält man mit Berücksichtigung des
Austausches eine Abweichung von nur 8% vom experimentellen Wert, während
die Aufspaltung ohne Berücksichtigung des Austausches um 60% zu klein ausfällt.

Herrn Prof. Dr. B. Kockel habe ich für die Überlassung des Themas sowie für
sein stetes Interesse für den Fortgang der Arbeit sehr zu danken.

Berlin, Friedenstraße 15.

(Bei der Redaktion eingegangen am 4. Mai 1953.)

Beitrag zur Erweiterung der Kenntnis der Elementarvorgänge der Magnetisierung in Eisen-Silicium-Kristallen¹⁾

Von Bruno Elschner

(Mit 13 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Mit der Methode der Bitterschen Streifen werden magnetische Elementarbezirke in der Nähe von Kristallkorn Grenzen und um natürliche und künstliche Fremdkörper untersucht. Durch Anlegen eines Magnetfeldes wird die Verschiebung von 180°-Blochwänden über Fremdkörper in der Oberfläche studiert. Schließlich wird während der Beobachtung die Temperatur der Probe erhöht.

Einleitung

Durch die theoretischen Untersuchungen von Néel²⁾ und durch die experimentellen Arbeiten von Williams, Bozorth und Shockley^{3) 4)} wurden in den letzten Jahren unsere Kenntnisse über das Verhalten der Elementarbezirke der Magnetisierung wesentlich erweitert. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen haben zur Folge, daß einige ältere Vorstellungen von den Elementarvorgängen der Magnetisierung ihre volle Gültigkeit nicht mehr behalten, sondern abgeändert oder ergänzt werden müssen. Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, mit dem von Williams, Bozorth und Shockley⁴⁾ angegebenen Verfahren weitere Einzelheiten der Elementarvorgänge der Magnetisierung zu untersuchen. Im Hinblick auf die Fremdkörpertheorie der Koerzitivkraft von Kersten^{5) 6)} wurde dabei besonderer Wert auf das Verhalten der Weißschen Bezirke in der Umgebung von nichtmagnetischen Gebieten gelegt. Die Rolle dieser nichtmagnetischen Einschlüsse übernehmen in unserem Falle immer Löcher in der Oberfläche der benutzten ferromagnetischen Proben. Dabei untersuchten wir sowohl die Umgebung von Hohlräumen, die durch den Polivorgang oder durch Lunkerbildung beim Schmelzen und Glühen der Metallproben zufällig entstanden waren, als auch die Umgebung von künstlich angebrachten Hohlräumen⁷⁾. Darüber hinaus untersuchten wir auch, wie sich eine Erhöhung der Temperatur auf die Elementar-

¹⁾ Auszug aus der Dissertation des Verfassers, Jena 1953.

²⁾ L. Néel, Extr. des Cah. de Phys. **25**, 21 (1944).

³⁾ H. J. Williams, Physic. Rev. **71**, 646 (1947).

⁴⁾ H. J. Williams, R. M. Bozorth u. W. Shockley, Physic. Rev. **75**, 155 (1949).

⁵⁾ M. Kersten, Grundl. einer Theorie der ferromagn. Hysteresis u. der Koerzitivkraft. Verlag Hirzel, Leipzig 1944.

⁶⁾ M. Kersten, Z. Physik **124**, 714 (1948).

⁷⁾ B. Elschner, Ann. Physik **11**, 45 (1952).

bezirke einheitlicher Magnetisierung auswirkt. Schließlich studierten wir die Bewegung von Blochwänden, welche abläuft, wenn man auf die Probe während der Beobachtung ein äußeres Magnetfeld einwirken läßt. Ähnliche Bewegungsabläufe von Blochwänden in der Nähe von Hohlräumen auf Fe-Si-Oberflächen wurden schon von Williams und Shockley⁸⁾ und kürzlich auch von Bates und Mee⁹⁾ veröffentlicht. Wir konnten dabei die Ergebnisse dieser Untersuchungen bestätigen und durch neue Beobachtungsreihen in mancher Hinsicht erweitern.

Experimentelle Anordnung

Wir führten unsere Untersuchungen zunächst an grobkristallinem, technischem Eisen-Silicium-Material durch. Mit etwa 3 Gew.-% Si legiertes Fe hat gegenüber reinem Eisen bekanntlich den Vorteil, daß man aus diesem Material relativ einfach größere Kristallkörner oder gar Einkristalle herstellen kann. Während bei der Abkühlung von „reinem“ Eisen bei etwa 900° C die bei höheren Temperaturen ausgebildete kubisch-flächenzentrierte γ -Phase in eine kubisch-raumzentrierte α -Phase umgewandelt wird und diese Umwandlung eine Ausbildung größerer Kristalle fast unmöglich macht, bleibt bei Zusatz von etwa 3 Gew.-% Si die α -Phase über dem gesamten Temperaturbereich erhalten, weil sich die γ -Phase im Zustandsdiagramm stark einschnürt.

Unsere Proben, die uns vom Stahlwerk Thale (Harz) zur Verfügung gestellt wurden, hatten äußere Maße von 15 cm \times 1 cm \times 0,5 cm. Sie wurden bei uns zunächst kritisch gereckt und dann im Wasserstoffstrom bei etwa 1000° C in einem Quarzrohrföfen mehrere Stunden lang gegläht. Bei dieser Behandlung trat starke Kornvergrößerung durch Rekristallisation ein. Die Kristallkörner hatten eine durchschnittliche Größe von 5 mm². Die Proben wurden danach mechanisch mit Sandpapier verschiedener Körnung (bis zu Nr.3/0) vorgepoliert und schließlich nach der in ⁴⁾ beschriebenen Methode elektrolytisch nachpoliert, bis die durch den mechanischen Poliervorgang zerstörte obere Schicht vollständig abgetragen war. Dabei war es zur Erzielung einer sauberen und glatten Oberfläche vorteilhaft, wenn die Probe senkrecht unter der Kathode angebracht war, damit die an der Anode entstehenden Sauerstoffbläschen von der Metalloberfläche sofort hochsteigen konnten. Außerdem mußte im Elektrolyten eine kräftige Strömung herrschen, damit Konzentrationsveränderungen an der Anode möglichst vermieden wurden. Die einzelnen Kristallkörner waren in ihrem Kristallgitter nun ganz verschieden zur Oberfläche der Probe orientiert. Deshalb konnte man nicht erwarten, daß auf allen Kristallkörnern übersichtliche Bezirksmuster auftraten. Vielmehr waren nur wenige Körner so günstig zur Oberfläche orientiert, daß sie für unsere Untersuchungen in Frage kamen.

Außer den Beobachtungen an grobkristallinem Material führten wir auch Untersuchungen an einem Fe-Si-Einkristall durch. Der Einkristall wurde von Herrn cand. phys. W. Stephan im Rahmen seiner Diplomarbeit hergestellt. Nach der Orientierung mit dem Laue-Rückstrahlverfahren wurde in der optischen Abteilung der Firma Zeiß eine (100)-Ebene mit einer Diamantscheibe sorgfältig angeschliffen. Gleich nach dem ersten Anschleifen konnte man „Tannenbaum-Strukturen“ beobachten. Die weitere Feinorientierung der Oberfläche wurde nicht

⁸⁾ H. J. Williams u. W. Shockley, *Physic. Rev.* **75**, 178 (1949) u. **78**, 341 (1950).

⁹⁾ L. F. Bates u. C. D. Mee, *Proc. physic. Soc. (A)* **65**, 140 (1952).

¹⁰⁾ L. F. Bates, *Proc. physic. Soc. (A)* **65**, 577 (1952).

mit Röntgenstrahlen durchgeführt, sondern mit Hilfe der sich jeweils einstellenden Bezirksmuster¹¹⁾. Die Länge der Tannenbaumzweige und ihre Breite, auch ihre gezackten Ränder sind ein empfindliches Kriterium für die Lage der kristallographischen Ebene relativ zur Oberfläche. Auf diese Weise konnten wir innerhalb kurzer Zeit die Oberfläche recht gut parallel zu einer (100)-Ebene orientieren.

Die Aufnahmen der Bezirksstrukturen wurden mit dem Zeißschen Metallmikroskop „Neophot“ gemacht. Dieses Gerät eignete sich gerade wegen seines Bauprinzipes nach Le Chatelier (d. h. der Objektisch liegt über der optischen Einrichtung) recht gut für unsere Untersuchungen; es bot den Vorteil, daß die störenden, größeren Fe_3O_4 -Teilchen in der Suspension sich auf dem Deckglas absetzen konnten und damit aus der abzubildenden Ebene herauswanderten.

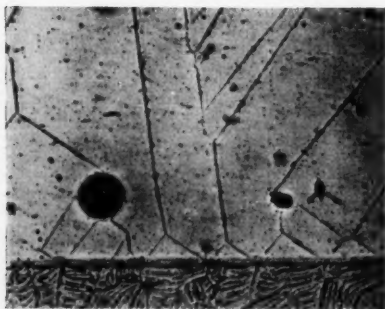
Um auch Veränderungen der Bezirksmuster unter Einwirkung eines äußeren Magnetfeldes beobachten zu können, wurde auf den Objektisch jeweils ein kleiner Elektromagnet zur Erzeugung eines horizontalen oder eines vertikalen Feldes gestellt. Die Betriebsstromstärke dieser Magnete wurde über einen Flüssigkeitswiderstand stufenlos verändert. Die an der Oberfläche der Probe wirksame Normalkomponente der Feldstärke wurde mit einer kleinen Induktionsspule ballistisch gemessen. Zur Messung der horizontalen Flußdichte benutzten wir ebenfalls eine Induktionsspule, die um die Probe gewickelt war.

Die Temperatur der Probe konnte während der Beobachtung zwischen 15° C und 95° C stetig verändert werden. Zu diesem Zwecke wurde ein größeres Gefäß aus Messing auf die Probe gestellt und in diesem Wasser mit dem Bunsenbrenner bis zum Sieden erhitzt. Die Temperatur der Probe wurde mit einem Thermoelement gemessen.

Weißsche Bezirke in der Nähe von Kristallkorngrenzen

Stoßen zwei Kristallkörner aneinander, so werden die Kristallgitter in den beiden Körnern im allgemeinen gegeneinander stark verkantet sein. Damit

stimmen dann auch ihre Vorzugslagen der Magnetisierung nicht überein. Während auf (100)-Oberflächen leicht deutbare Bezirksmuster entstehen, ist das etwa auf (111)-Oberflächen gar nicht der Fall. Auch die Normalkomponente der Magnetisierung wird im allgemeinen nicht stetig durch die Korngrenze hindurchgehen. Aus diesem Grunde müßte man an der Korngrenze ein starkes magnetisches Streufeld erwarten. In Abb. 1 sieht man, wie dieses Streufeld an der Korngrenze abgebaut wird, wenn die Magnetisierung parallel zur Korngrenze verläuft, d. h. wenn an der Korngrenze „Zwickel-Bezirke“ eingeschaltet werden, über die die Magnetisierung um 90° umgelenkt



0.1 mm

Abb. 1. Weißsche Bezirke an einer Kristallkorngrenze

¹¹⁾ C. D. Mee, Proc. phys. Soc. (A) 63, 922 (1950).

wird. Auf die Ausbildung solcher Abschlußbezirke haben Landau und Lifshitz¹²⁾ schon 1935 hingewiesen. An freien Oberflächen wurden sie in den Bell-Laboratorien¹³⁾ zum erstenmal beobachtet.

Daß man solche Abschlußdreiecke auch künstlich erzeugen kann, zeigt Abb. 2. Hier wurde über den Kristall unter einem Winkel von etwa 112° zur Magnetisierungsrichtung mit einer feinen Diamantspitze eine Furche *AB* gezogen. Bevor dieser Kratzer angebracht war, lief die 180° -Blochwand (Abb. 2) ohne Störung zusammenhängend von links oben nach rechts unten durch das Gesichtsfeld. Nach Anbringen des Grabens muß dieser durch ein erhebliches Streufeld überbrückt werden, weil die Magnetisierung beinahe senkrecht auf den Graben stößt. Wenn sich nun auf beiden Seiten der Furche dreieckförmige Bezirke ausbilden, über die die Magnetisierung um 90° umgelenkt wird, so werden die Komponenten der Magnetisierung senkrecht zum Graben viel kleiner, das Streufeld damit geringer. Die zur Ausbildung dieser Bezirke aufzuwendende Wandenergie fällt gegenüber der Verringerung der Streufeldenergie kaum ins Gewicht. Wenn die Magnetisierung innerhalb dieser Abschlußbezirke wieder in eine ihrer Vorzugslagen zu liegen kommt, braucht dabei auch keine Anisotropieenergie aufgewandt werden.

In Abb. 3 laufen die 180° -Blochwände bis an die Kristallgrenze, ohne daß sich Dreieckbezirke ausbilden. Außerdem fällt auf, daß an den Wänden keine Tannenbaumzweige zu sehen sind, daß sich überhaupt keine 90° -Wände ausbilden. Eine solche Anordnung ist beim Eisen auf (110)-

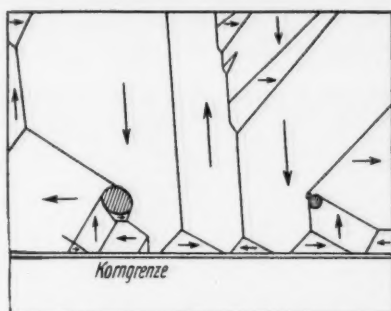


Abb. 1 b. Richtung der Magnetisierung in den einzelnen Weißschen Bezirken (Skizze zu Abb. 1)



0,1mm

Abb. 2. Dreieckförmige Weißsche Bezirke, die sich nach dem Anbringen der Furche *AB* ausbildeten

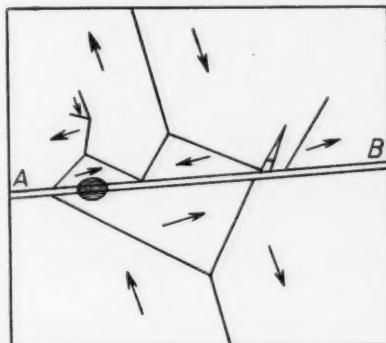
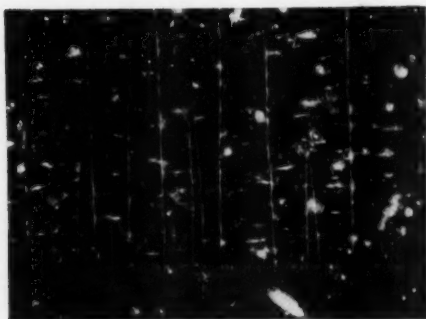


Abb. 2b.

¹²⁾ L. Landau u. E. Lifshitz, Physik. Z. der Sowjetunion 8, 153 (1935).

¹³⁾ R. M. Bozorth, J. Physique Radium 12, 308 (1951).

Oberflächen möglich. Shockley¹⁴⁾ hat die Entstehung solcher dolchförmigen Bezirke begründet und gezeigt, daß, wenn die Normalkomponente der Magnetisierung nicht stetig durch die Korngrenze hindurchgeht, durch die Dolche das Streufeld an der Korngrenze verringert wird.



0,1mm

Abb. 3. Weißsche Bezirke auf einer (110)-Ebene

Auch auf den Oberflächen, die wir untersuchten, traten solche Zipfelmützen an kleinen Löchern, die beim Polieren zufällig entstanden waren, sehr häufig auf.



0,1mm

Abb. 4. „Néel'sche Zipfelmützen“ an Löchern in der Oberfläche

Weißsche Bezirke in der Umgebung von Höhlungen (Fremdkörper) in der Oberfläche

Néel²⁾ zeigt, daß die magnetische Streufeldenergie an einem nichtmagnetischen Fremdkörper erheblich verringert wird, wenn sich um den Fremdkörper herum neue Weißsche Bezirke als Zipfelmützen ausbilden. In der Arbeit von Williams³⁾ erfährt diese Voraussage ihre experimentelle Bestätigung.

In Abb. 4 sind bei dem Poliervorgang mehrere Löcher verschiedener Größe entstanden. An dem kleineren Hohlraum sieht man dieselben Zipfelmützen wie in der Arbeit von Williams. An dem größeren Hohlraum bilden sich allerdings nicht nur zwei Zipfelmützen aus, sondern mehrere. Da die Oberfläche leicht gegen die Würfebene geneigt ist, treten auch Tannenbäume auf. Die Tannenbaumzweige sind in derselben Richtung magnetisiert wie die Bezirke um dem Fremdkörper. Deshalb ist es möglich, daß der in Abb. 4 von dem großen Fremdkörper nach links unten verlaufende Bezirk gleichzeitig „Tannenbaum“ und „Zipfelmütze“ ist. Durch Einschalten dieses Weißschen Bezirkes wird also sowohl ein zu großes Streufeld am Fremdkörper vermieden als auch das durch die Neigung hervorgerufene Streufeld über der Oberfläche abgebaut.

¹⁴⁾ W. Shockley, J. Physique Radium 12, 308 (1951).

Gegenseitige Beeinflussung mehrerer Fremdkörper

Es ist zu erwarten, daß sich die Zipfelmützen an den Fremdkörpern gegenseitig beeinflussen, wenn der Abstand zwischen den Löchern zu klein wird. Aus einer Anzahl solcher Aufnahmen werden zwei typische Beispiele herausgegriffen, Abb. 5 und Abb. 6. Bei beiden Aufnahmen verläuft die Magnetisierung parallel zur seitlichen Begrenzung des Bildes. Während in Abb. 5 die Verbindungslinie der Fremdkörper parallel zur Richtung der Magnetisierung verläuft, bildet in Abb. 6 diese Verbindungslinie mit der Magnetisierungsrichtung einen Winkel von 45° . Bei der

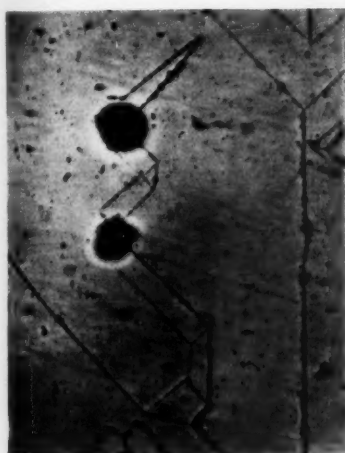


Abb. 5

0.05mm



Abb. 6

0.1mm

Verstümmelte Néelsche Zipfelmützen an zwei benachbarten Fremdkörpern

Abb. 5 bilden sich ganz normale Zipfelmützen aus. Allerdings würde eine Überschneidung der unteren Zipfelmütze des oberen Fremdkörpers mit der oberen Zipfelmütze des unteren Fremdkörpers stattfinden. Diese Überschneidung wird vermieden, indem sich diese beiden Zipfelmützen gegenseitig aufzehren. Dabei bildet sich an der Überkreuzungsstelle ein kleiner dreieckförmiger Bezirk aus, der einen streufeldfreien Übergang zwischen den beiden Zipfelmützen garantiert. Auch die jetzt etwas verstümmelten Zipfelmützenbezirke erfüllen noch vollständig ihre Aufgabe, die Quellen für ein Streufeld am Fremdkörper zu beseitigen. Die untere Zipfelmütze des unteren Fremdkörpers würde sich mit einem Tannenbaum überschneiden. Auch diese Überschneidung wird vermieden, indem sich Tannenbaum und Zipfelmütze über einen prismenförmigen Bezirk gegenseitig verbinden. Schließlich wird durch die Anordnung in Abb. 6 erreicht, daß die obere Zipfelmütze des unteren Fremdkörpers und die untere Zipfelmütze des oberen Fremdkörpers vereinigt sind. Dadurch wird ein erheblicher Betrag Wandenergie eingespart.

In der Arbeit von Kersten²⁾ wird zur Vereinfachung angenommen, daß die Fremdkörper im Ferromagnetikum ein kubisches Übergitter bilden. In der An-

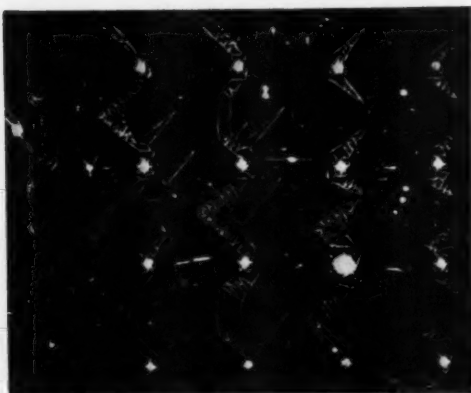


Abb. 7

0,1mm

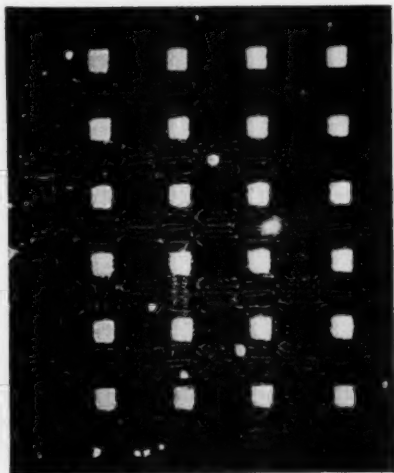


Abb. 8

0,1mm

Bezirksstrukturen um die pyramidenförmigen Eindrücke eines Mikrohärteprüfers. Die Eindrücke sind gitterähnlich angeordnet

nicht sehen. Anscheinend füllen die durch den Eindruck hervorgerufenen mechanischen Störungen jetzt fast den ganzen Zwischenraum zwischen den Löchern aus, so daß sich klare Blochwandstrukturen nicht mehr ausbilden können.

lehnung an dieses Modell haben wir mit der Pyramide eines Mikrohärteprüfers ein kubisches Flächengitter in die Oberfläche eines Fe-Si-Einkristalles eingedrückt (Abb. 7 und Abb. 8). Wenn die Eindrücke im Vergleich zu ihrem gegenseitigen Abstand klein genug sind (Abb. 7), so bilden sich an den Löchern Zipfelmützen aus, die sich nach dem Elementarvorgang in Abb. 5 auch gegenseitig verbinden. Dabei ist besonders darauf hinzuweisen, daß die Wände dieser Abschlußprismen zwischen den einzelnen Zipfel-

mützen auch leicht gewölbt verlaufen. In den meisten Zipfelmützen bemerkt man noch eine Zackenstruktur. Diese rührt daher, daß die Oberfläche nicht genau eine (100)-Fläche ist. Vielmehr scheinen auf den Stellen der Oberfläche, wo die Magnetisierung waagrecht verläuft (wie in den Zipfelmützen), Quellen für ein Streufeld zu entstehen. Dieses Streufeld wird durch die Zackenmuster nach dem Schema der Tannenbaumstrukturen abgebaut. Wird das Verhältnis zwischen gegenseitigem Abstand und Eindruckbreite kleiner, so bilden sich keine Zipfelmützen mehr aus (Abb. 8). Weil zwischen den Eindrücken deutlich 180°-Wände sichtbar werden, kann man aber feststellen, daß die Magnetisierung, die außerhalb des Gitters von oben nach unten verläuft, zwischen den Eindrücken um 90° umgelenkt wird. Der einzelne Eindruck wird auf diese Weise streufeldfrei von der Magnetisierung umflossen. Wie sich dieser Übergang im einzelnen vollzieht, das kann man aus der Abb. 8

B. E

A
zu s
gege
vone
schic
Bezi
wür
viele

Tren
Dure

F
es b
dure
daß
einen
bleib
löst
auf t

1

Sägezahnwände

Auf Einkristalloberflächen beobachteten wir häufig Muster, wie sie in Abb. 9 zu sehen sind. Dieses Bild zeigt offenbar drei größere Weißsche Bezirke entgegengesetzter Magnetisierungsrichtung, die durch eigentümliche Sägezahnwände voneinander getrennt sind. Man kann das Auftreten solcher ausgefranzten Trennschichten verstehen, wenn man annimmt, daß die Magnetisierung in den einzelnen Bezirken in den angegebenen Pfeilrichtungen verläuft. Ohne die Sägezähne würden längs der unter 45° zur Magnetisierungsrichtung verlaufenden Wände viele Quellen für ein entmagnetisierendes Feld auftreten, weil die Normalkomponente der Magnetisierung dann beim Übergang von einem Bezirk zum nächsten eine große Änderung erleiden würde. In den kleinen gezackten Bezirken, die jeweils nur auf einer Seite der Wand auftreten, wird die Magnetisierung aber um 90° umgelenkt, so daß ein entmagnetisierendes Feld weitgehend vermieden wird.



Abb. 9

0.1mm

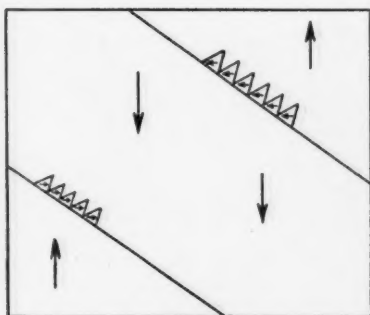


Abb. 9b

Trennwände zwischen Bezirken, deren Magnetisierungsrichtungen antiparallel verlaufen. Durch die Ausbildung der Zacken an den Wänden wird ein Streufeld weitgehend vermieden

Zum Mechanismus der Koerzitivkraft

Für die Erklärung der Koerzitivkraft auf Grund einer Fremdkörpertheorie ist es besonders wichtig, daß man die Elementarvorgänge eines Wanddurchganges durch einen Fremdkörper gut kennt. Schon Williams und Shockley¹⁵⁾ zeigten, daß eine über einen Fremdkörper hinwegbewegte 180° -Wand zunächst noch durch einen schlauchförmigen Weißschen Bezirk mit dem Fremdkörper verbunden bleibt. Sie zeigen, daß dieser schlauchförmige Bezirks sich schließlich von der Wand löst und auf die Länge einer Zipfelmütze zurückspringt. Kondorsky¹⁵⁾ stellte auf Grund dieser Vorgänge eine Formel für die Koerzitivkraft auf, die mit der ent-

¹⁵⁾ E. Kondorsky, Dokl. Akad. Nauk. USSR 68, 37 (1949).

sprechenden Formel in der Kerstensenen Theorie grundsätzlich übereinstimmt. Die Bilderserie 10 zeigt eine 180° -Wand in der Nähe eines Fremdkörpers. Sie wird unter dem Einfluß eines äußeren Magnetfeldes langsam nach rechts verschoben.

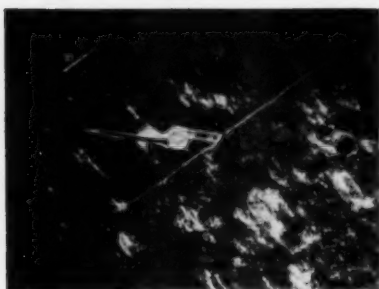


Abb. 10a
 $B = 11900 \text{ G.}$

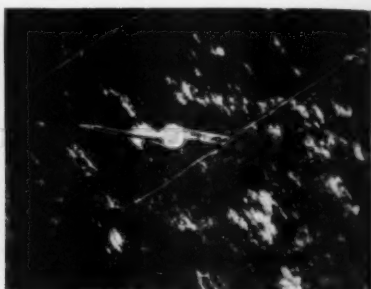


Abb. 10b
 $B = 16100 \text{ G.}$

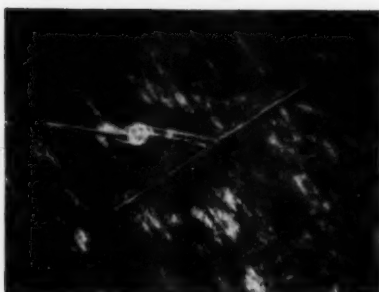


Abb. 10c
 $B = 17000 \text{ G.}$

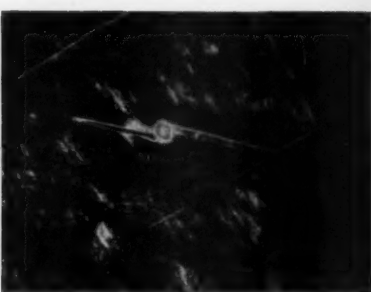


Abb. 10d
 $B = 17300 \text{ G.}$

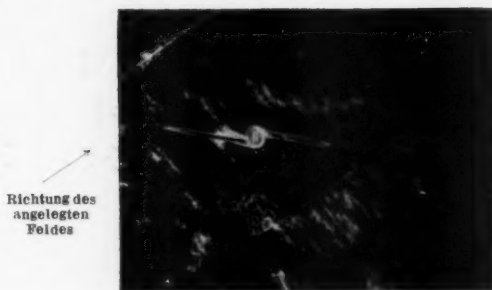


Abb. 10e
 $B = 17600 \text{ G.}$

B. M.
Dab
rever
schla
klein
der l
Schl
der

V
Hoh
zunä
hat
streu
an d
steh
breit
Bezi
nach
strul
Yin
deru
sich
strul
diese
(Abl
nebe
ände
Ansc
gebr
Hau
Die
dab
lich
die
wen
nun
will,
inde
dur
Hoh
S
sie c
von
Mag
sieu
erwa

Dabei wurde Wert darauf gelegt, daß die Wand nur in sehr kleinen und durchaus reversiblen Schritten vorwärts bewegt wurde. Man sieht, wie sich in Abb. 10d der schlauchförmige Bezirk ein wenig kegelförmig zuspitzt, so daß er sich beim nächsten kleinen Schritt der Wand löst und dann plötzlich zurückspringt. Das Verhältnis der beiden Längen L_1/L_2 kann man zu $3/2$ bestimmen. Dabei ist L_1 die Länge des Schlauches, wenn er gerade noch mit der Wand verbunden ist, L_2 ist die Länge der zurückgesprungenen Zipfelmütze.

Beobachtung eines Elementaraktes der Koerzitivkraft

Wie sich die Wandverschiebungen in der Nähe eines künstlich angebrachten Hohlraumes gestalten, zeigen die Abb. 11a—c. Die Hauptwand steht in 11a zunächst in größerer Entfernung vom Pyramideneindruck. Um den Eindruck herum hat sich eine Bezirksstruktur ausgebildet, die dafür sorgt, daß der Eindruck streufeldfrei im gleichbleibenden Richtungssinn magnetisch umflossen wird. Damit an der unteren und oberen Stirnseite dieser Abschlußstrukturen keine Pole entstehen, wird die Magnetisierung auch an diesen Stellen durch Ausbildung von breiten, schlauchförmigen Bezirken um 90° umgelenkt. Der schlauchförmige Bezirk nach rechts unten ist streufeldfrei mit der Hauptwand verbunden. Derjenige nach links oben schließt sich am Rande des Kristallkornes an merkwürdige Wabenstrukturen streufeldfrei an. Über die Ausbildung ähnlicher Wabenstrukturen haben Ying, Levy und Truell¹⁶⁾ neuerdings berichtet. Nähert man nun durch Änderung des angelegten Magnetfeldes die Hauptwand dem Hohlraum, so vollzieht sich diese Wandverschiebung zunächst vollkommen reversibel. Die Bezirksstruktur um den Hohlraum ändert sich dabei nicht. Man kann die Hauptwand auf diese Weise bis auf einen Minimalabstand an den Fremdkörper heranschieben (Abb. 11c). In dieser Stellung verlaufen zwei 180° -Wände in engem Abstand nebeneinander. Wenn man das äußere Feld jetzt noch weiter im selben Sinn ändert, verändert sich die Bezirksgeometrie zunächst fast nicht mehr. Es hat den Anschein, als ob die beiden parallelverlaufenden 180° -Wände nicht näher zusammengebracht werden könnten. Wird das Feld schließlich zu groß, so springt die Hauptwand ganz plötzlich in die Ebene, in der der Eindruck liegt (Abb. 11d). Die beiden 180° -Wände, die sich vorher noch gegenüber standen, vernichten sich dabei gegenseitig, und in einem größeren Gebiet klappt die Magnetisierung plötzlich um 180° um. Damit ist zum erstenmal beobachtet, wie ein Elementarakt, der die Koerzitivkraft bestimmt, abläuft. Der Barkhausensprung erfolgt also erst, wenn die Hauptwand in unmittelbarer Nähe des Fremdkörpers steht. Wenn man nun die 180° -Hauptwand aus der Ebene, in die sie gesprungen ist, wieder entfernen will, so erfolgt der Barkhausensprung gleich bei Beginn der Wandbewegung, indem in einem größeren Gebiet die Magnetisierung plötzlich umklappt und indem durch Ausbildung neuer 180° -Wände die vollständige Bezirksstruktur um den Hohlraum plötzlich entsteht.

Schließlich beobachteten wir noch, wie sich eine 180° -Wand verhält, wenn man sie durch ein eingedrücktes „Gitter“ bewegt. In den Abb. 12 werden dem Gitter von links zwei 180° -Wände genähert, welche einen schmalen Bezirk umgekehrter Magnetisierungsrichtung einschließen. Das äußere Feld wirkt so, daß die Magnetisierungsrichtung in diesem Bezirk günstig zur Feldrichtung liegt. Man müßte also erwarten, daß sich der schmale Bezirk auf Kosten des umliegenden Gebietes ver-

¹⁶⁾ C. F. Ying, S. R. Levy u. R. Truell, J. appl. Phys. **23**, 1339 (1952).



Abb. 11a
 $B = -17500$ G.

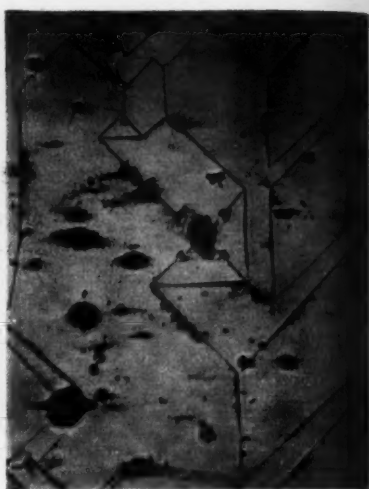


Abb. 11b
 $B = -2000$ G.



Abb. 11c
 $B = +12300$ G.

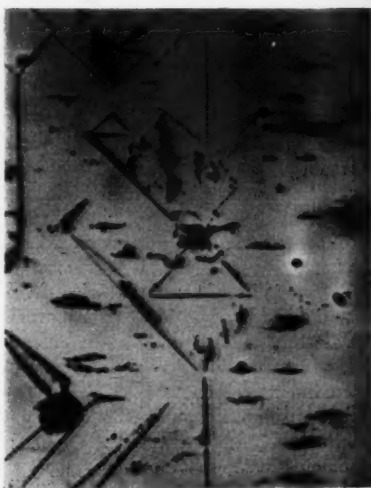


Abb. 11d
 $B = +17500$ G.

Bewegung einer 180° -Wand in der Nähe eines künstlich angebrachten Hohlraumes. Vom Zustand der Abb. 11c springt die Wand plötzlich in die Lage der Abb. 11d. Die Richtung des angelegten Magnetfeldes verläuft parallel zur seitlichen Begrenzung der Bilder

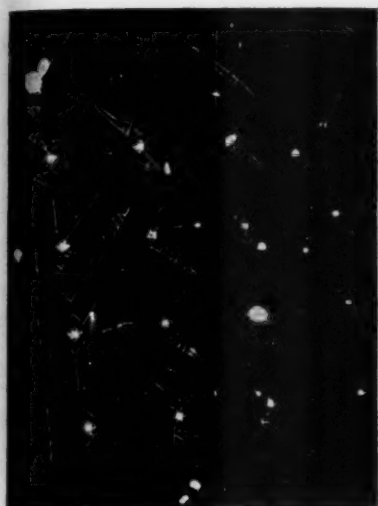


Abb. 12a
 $B = 0$



Abb. 12b
 $B = 14400 \text{ G.}$

— — — — —
0.1mm

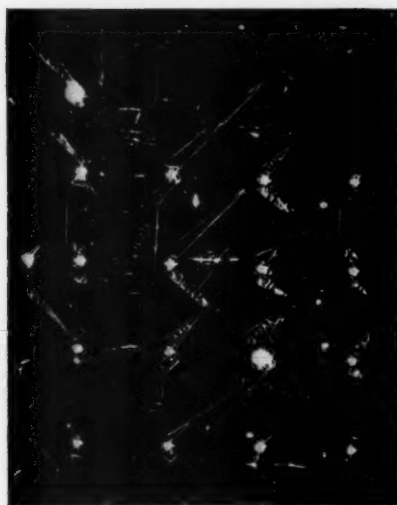


Abb. 12c
 $B = 15700 \text{ G.}$

Bewegung einer 180° -Wand durch ein künstlich angebrachtes Gitter. Das angelegte Magnetfeld verläuft parallel zur seitlichen Begrenzung der Bilder

größert, indem seine linke Wand nach links und seine rechte Wand nach rechts wandert. Auf dem ersten Bild (äußeres Feld = 0) befindet sich die rechte Wand in der Ebene der ersten Fremdkörperreihe. Damit sind keine Zipfelmützen zu diesen Fremdkörpern nötig und doch werden die Löcher streufeldfrei umflossen. Läßt man nun das äußere Feld einwirken, so verschiebt sich die rechte Wand nach rechts und zieht Zipfelmützen, aus den Fremdkörpern heraus, hinter sich her. Dabei verläuft die Wand aber durchaus nicht mehr in einer Ebene. Vielmehr ist sie an einzelnen Stellen schon weiter fortgeschritten, während sie an anderen Stellen augenscheinlich zurückgehalten wird (Abb. 12b). Die einzelnen Wandabschnitte bleiben aber in der Hauptsache immer noch geradlinig; nur an den Stellen, wo die Zipfelmützen mit der Wand verbunden sind, wird die Wand zurückgezogen. Dabei wird diese Ausbuchtung der Wand oft noch von den Zipfelmützen der nächsten Fremdkörperreihe begünstigt. Bewegt man die Wand noch weiter nach rechts, so reißen die Zipfelmützen schließlich ab und springen zurück. Dabei glättet sich die Wand aus, macht aber keinen beobachtbaren Barkhausensprung nach rechts. Durch weiteres Anwachsen des äußeren Feldes kommt die Wand schließlich in die Nähe der nächsten Fremdkörperreihe, mit deren Zipfelmützen sie sich schon vorher verbunden hatte.

Wandverschiebungen durch Erhöhung der Temperatur

Wenn man eine dünne Probe auf dem Mikroskop langsam erwärmt, so setzen bei etwa 90° C auch ohne die Wirkung eines äußeren Magnetfeldes Wandverschiebungen ein. Diese laufen zum Teil reversibel, zum Teil auch irreversibel ab. Dabei sind die Veränderungen in den Weißschen Bezirken vor allem dadurch gekennzeichnet, daß die Tannenbaumzweige kürzer werden (Abb. 13). Da die Kristallanisotropieenergie beim Eisen nach Messungen von Bozorth¹⁷⁾ von Zimmertemperatur bei 90° C um etwa 12% abnimmt, wird die Poldichte auf der gegen eine (100)-Ebene leicht geneigten Oberfläche bei höheren Temperaturen geringer, weil sich die Magnetisierungsvektoren bei einer kleinen Abweichung von ihrer strengen Vorzugslage mehr parallel zur Oberfläche einstellen werden. Die geringere Poldichte auf der Oberfläche erlaubt aber, daß die Tannenbäume kürzer werden. Eine Verkürzung der Tannenbäume wird auch noch begünstigt durch die schwache Abnahme der Sättigungsmagnetisierung. Dagegen verändert sich die Länge der Fremdkörper-Zipfelmützen bei höheren Temperaturen nicht merklich. Dieses Verhalten erscheint plausibel, wenn man bedenkt, daß die Länge der Zipfelmützen durch J_s/\sqrt{K} (siehe⁴⁾) bestimmt ist. J_s und K nehmen mit steigender Temperatur zwar in verschiedener Weise ab. Dadurch, daß das Quadrat von J_s und die Wurzel von K in den Ausdruck für die Länge eingeht, wird der Einfluß dieser unterschiedlichen Temperaturabhängigkeit wieder ausgeglichen und die Länge der Zipfelmützen bleibt in vielen Versuchsreihen annähernd konstant.

Zusammenfassung

Das allgemeine Minimalprinzip, wonach sich die Geometrie der Bezirksstrukturen immer so einstellt, daß ein möglichst kleiner Betrag an freier Energie dafür aufgewandt werden muß, läßt sich bis in alle Einzelheiten auch in der Umgebung

¹⁷⁾ R. M. Bozorth, J. appl. Phys. 8, 575 (1937).

von Fremdkörpern verfolgen. Die Form des Fremdkörpers hat einen Einfluß auf die Gestalt der Bezirke. Um kugelförmige Fremdkörper bilden sich parabelähnliche Blochwände aus⁷⁾. Die Bezirksmuster um einzelne pyramidenförmige Mikroeingdrücke spiegeln deutlich die Symmetrie dieser Eindrücke wieder⁷⁾.

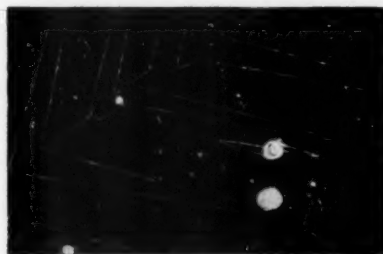


Abb. 13a
T = 18° C

0,1 mm

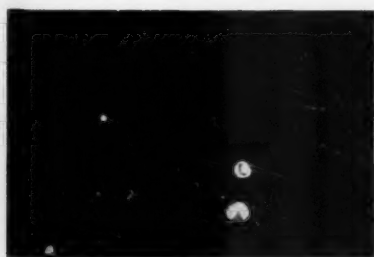


Abb. 13b
T = 85° C



Abb. 13c
T = 95° C

Veränderung der Tannenbaumstrukturen bei Erhöhung der Temperatur während der Beobachtung

An Kristallkorngrenzen wie an künstlich angebrachten Furchen bilden sich dreieckförmige Abschlußbezirke aus, über die die Magnetisierung um 90° umgelenkt wird. Auf diese Weise wird auch hier ein zu großes Streufeld vermieden.

Wenn man eine 180°-Wand durch ein in die Oberfläche des Kristalles eingedrücktes „Gitter“ bewegt, zieht diese 180°-Wand zunächst Zipfelmützen hinter sich her. Ehe sich die Zipfelmützen von der Wand lösen, erscheint die Wand durchaus gebogen und verläuft nicht mehr in einer Ebene. Ein Barkhausensprung der 180°-Wand vollzieht sich dann, wenn die Wand aus der Mittelebene der Fremdkörperreihe heraustritt.

Die Ablösung einer Zipfelmütze von der bewegten Hauptwand wurde in allen Einzelheiten bei mehreren Fremdkörpern studiert. Dabei konnte man in den meisten Fällen feststellen, daß die Zipfelmütze zunächst nach vorn spitz zusammenläuft und dann um $\frac{1}{3}$ ihrer Länge zurückspringt. Die Wand selbst bleibt beim

Zurückspringen der Zipfelmütze stehen. Dieser Vorgang konnte auch am selben Fremdkörper mehrmals hintereinander beobachtet werden. Es zeigte sich, daß die Zipfelmütze immer auf dieselbe Länge zurücksprang.

An verschiedenen Fremdkörpern konnten die Barkhausensprünge, die die Koerzitivkraft bestimmen, beobachtet werden.

Durch die Veränderung der Temperatur zwischen 15°C und 95°C konnten bei 90°C ablaufende Wandverschiebungen beobachtet werden.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. M. Kersten, der die Anregung zu dieser Arbeit gab, bin ich für wertvolle Förderung während meines Studiums sehr zu Dank verpflichtet.

Herrn Prof. Dr. A. Eckardt und Herrn Prof. Dr. W. Schütz danke ich für viele fördernde Diskussionen und Hinweise beim Entstehen der Arbeit. Außerdem danke ich den Mitarbeitern des Forschungsinstitutes für magnetische Werkstoffe für manchen guten Rat. Herr Dr. Gause und Herr H. Müller vom Mikroskop-Labor der Firma VEB Optik Carl Zeiß, Jena, haben mir beim Anbringen der Eindrücke sehr geholfen, auch ihnen sei herzlich gedankt. Die Arbeit wurde als Forschungsauftrag von der Staatlichen Plankommission in jeder Weise unterstützt.

Jena, Physikalisches Institut der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen 27. April 1953.)

Über den Einfluß von Sauerstoff auf die Leitfähigkeit von CdS-Einkristallen

Von W. Muscheid

(Mit 15 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Durch Ausheizen im Vakuum erhöht sich die Dunkelleitfähigkeit von CdS-Kristallen um Größenordnungen. Diese Erhöhung kann durch den Einfluß von Sauerstoff wieder rückgängig gemacht werden. Der Temperaturverlauf der Dunkel- und Photoleitfähigkeit wird im Bereich von 300 bis 700° K gemessen. Er hängt in charakteristischer Weise von der Vorbehandlung der Kristalle ab. Zur Deutung der Meßergebnisse wird ein Fehlordnungsmodell angegeben.

1. Einleitung

Über die Leitfähigkeit von CdS-Einkristallen liegt bereits eine große Anzahl Arbeiten vor, die sich zumeist auf die Untersuchung des Photostromes beschränken¹⁻⁶). Bei der Deutung der beobachteten Erscheinungen wird zum Teil eine nahezu ideale einkristalline Struktur der Kristalle angenommen; häufig erfolgt auch die Berücksichtigung der nichtidealen Eigenschaften der Kristalle in der Weise, daß die aus der Erfahrung der Lumineszenzphysik und aus Messungen an anderen photoleitenden Halbleitern bekannten Modellerweiterungen eingeführt werden¹⁾²⁾³⁾⁴⁾.

Die Ergebnisse verschiedener Autoren (und auch gleicher Autoren an verschiedenen Exemplaren) zeigen in einigen Punkten erhebliche Abweichungen voneinander. Auf Grund zahlreicher Untersuchungen an Halbleitern ist man zu der Annahme berechtigt, daß die Ursache dieser Abweichungen zum großen Teil in der nichtidealen Struktur der Kristalle begründet ist⁹).

Das Bändermodell der Festkörper¹⁰⁾¹¹) hat sich in vielen Fällen als brauchbare Grundlage zur Behandlung von Halbleiterproblemen erwiesen. Abweichungen vom idealen einkristallinen Zustand werden in diesem Modell durch die Entste-

¹) J. Faßbender, Ann. Physik (6) **5**, 33 (1949).

²) I. Broser u. R. Warminsky, Ann. Physik (6) **7**, 289 (1950).

³) R. Seiwert, Ann. Physik (6) **5**, 241 (1949).

⁴) I. Broser u. R. Warminsky, Z. Naturforschg. **5a**, 62 (1950).

⁵) I. Broser, H. Kallmann u. R. Warminsky, Z. Naturforschg. **4a**, 631 (1949).

⁶) J. Faßbender u. H. Lehmann, Ann. Physik (6) **6**, 215 (1949).

⁷) R. Frerichs, Naturwiss. **33**, 281 (1946); Physic. Rev. **72**, 594 (1947).

⁸) J. Faßbender, F. Möglich u. R. Rompe, Ann. Physik (6) **3**, 327 (1948).

⁹) G. Busch, ZAMP I, S. 3 u. 81 (1950).

¹⁰) H. Fröhlich, Elektronentheorie der Metalle (Springer, Berlin 1936).

¹¹) F. Seitz, Modern Theory of Solids (MacGraw Hill, New York 1941).

hung von Energietermen in dem verbotenen Bereich zwischen dem Valenz- und dem Leitungsband beschrieben. Diese Terme sind entweder mit Elektronen besetzt oder unbesetzt. Es ist eine der Hauptaufgaben der Halbleiterforschung, sich über die Art, die energetische Lage und die Dichte dieser Terme Aufschluß zu verschaffen. Die wichtigsten Verfahren hierzu beruhen auf Messungen der Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit, des Halleffektes, der optischen und thermoelektrischen Eigenschaften⁹⁾. Die theoretische Auswertung derartiger Messungen ist leider noch sehr problematisch und liefert auch nur in wenigen Fällen übereinstimmende Ergebnisse¹²⁾.

Auch der Einfluß von Druck und Art des umgebenden Gases auf die Leitfähigkeit und die sonstigen Eigenschaften von Halbleitern ist eine häufig beobachtete Erscheinung. Derartige Messungen sind meist an nicht einkristallinen Stoffen durchgeführt worden. Häufig werden die Substanzen hierbei in dem Gas einer ihrer Komponenten erhitzt. Dadurch treten Abweichungen von der stöchiometrischen Zusammensetzung auf, bzw. vorhandene Abweichungen werden vergrößert oder verkleinert. Man beobachtet sowohl bei Zunahme des Metallüberschusses als auch bei Zunahme des Metalloidüberschusses eine Zunahme der elektrischen Leitfähigkeit. In vielen Fällen konnte man hierbei zeigen (durch Messung des Halleffektes oder der thermoelektrischen Spannung), daß bei Metallüberschuß die Elektronenleitung, bei Metalloidüberschuß die Defektelektronenleitung überwiegt¹³⁾ ¹⁴⁾ ¹⁵⁾.

Auch der Einfluß von Fremdgasen wurde bei einigen Substanzen untersucht. Hintenberger¹⁶⁾ zeigte z. B., daß die Leitfähigkeit von überbleiten, im Vakuum hergestellten PbS-Schichten schon durch geringste Sauerstoffmengen stark beeinflusst wird.

An CdS liegen bisher nur wenige experimentelle Untersuchungen über diese Fragen vor. K. W. Boer¹⁷⁾ hat die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit von CdS-Einkristallen bei höheren Temperaturen gemessen. Er erhält reproduzierbare Ergebnisse nur bei hohen Aufheiz- bzw. Abkühlgeschwindigkeiten. Dieses Verhalten findet man oft bei Stoffen, deren Leitfähigkeit stark von den äußeren Bedingungen abhängt (man vergleiche z. B. die Messungen von Baumbach und Wagner¹⁸⁾ an ZnO mit denen von Miller¹⁹⁾). Bube²⁰⁾ beobachtete beim Aufpumpen der Luft über einem CdS-Kristall eine Zunahme des Photostromes. H. Simon²¹⁾ stellte bei Behandlung mit einer Glimmentladung einen starken Gaseinfluß auf die elektrischen Eigenschaften von CdS-Einkristallen fest.

In der vorliegenden Arbeit wird die Dunkel- und die Photoleitfähigkeit von CdS-Einkristallen in einem Temperaturbereich von etwa 300–700 K untersucht. Die Messungen wurden unter verschiedenen äußeren Bedingungen, teils im Vakuum, teils in Sauerstoff bzw. Luft von variablem Druck durchgeführt. Die Ergebnisse lassen sich als ein Beitrag zu den oben angeschnittenen Fragen deuten.

¹²⁾ H. K. Henisch, Z. physik. Chem. **198**, 41 (1951).

¹³⁾ G. L. Pearson u. J. Bardeen, Physic. Rev. **75**, 865 (1949).

¹⁴⁾ G. Busch u. H. Labhart, Helv. phys. Acta **19**, 463 (1946).

¹⁵⁾ G. L. Pearson u. W. Shockley, Physic. Rev. **71**, 142 (1947).

¹⁶⁾ H. Hintenberger, Z. Naturforschg. I. **1** (1946).

¹⁷⁾ K. W. Boer, Ann. Physik (6) **10**, 20 (1952).

¹⁸⁾ H. H. Baumbach u. C. Wagner, Z. physik. Chem. **22**, 199 (1933); **24**, 59 (1934).

¹⁹⁾ P. H. Miller, Physic. Rev. **60**, 890 (1941).

²⁰⁾ R. H. Bube, Physic. Rev. **83**, 393 (1951).

²¹⁾ A. undl. Mitteilung.

2. Versuchsanordnung

Die zu den Messungen verwendeten CdS-Einkristalle wurden im Institut für Festkörperforschung nach bekanntem Verfahren²²⁾ hergestellt. Kristalle, die im Bereich bis etwa 15 Volt eine wesentliche Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der angelegten Spannung zeigten, wurden ausgeschieden, desgleichen diejenigen, die beim Umpolen der angelegten Spannung eine merkliche Gleichrichterwirkung zeigten. Durch diese Maßnahme sollte erreicht werden, daß nur möglichst homogene Stücke mit einwandfreien Kontakten zu den Messungen ausgewählt wurden. Kristalle mit einem abnorm hohen Dunkelstrom wurden ebenfalls nicht für die Messungen verwendet.

Abb. 1 zeigt eine schematische Skizze der Meßanordnung. Die mit aufgedampften Goldelektroden versehenen Kristalle werden in ein Glasrohr gebracht, das mit einer Hg-Diffusionspumpe auf 10^{-4} – 10^{-6} mm Hg ausgepumpt werden kann. Das untere Ende des Glasrohres trägt außen eine Heizwicklung, die mit hitzebeständigem Kitt festgelegt ist. Durch ein kleines, in der Heizwicklung freigelassenes Fenster können die Kristalle beleuchtet werden.

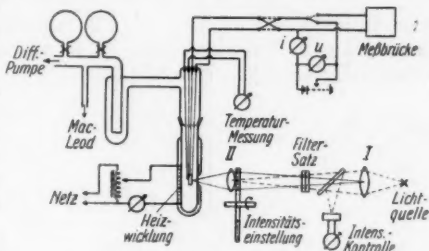


Abb. 1. Meßanordnung

Als Lichtquelle dient teils eine Glühlampe (6 Volt, 5 Amp.), teils eine Quecksilberhöchstdrucklampe (HBO 200). Durch einen in den Strahlengang eingeschalteten Filtersatz wird nur die blaue Hg-Linie durchgelassen. Die Einstrahlung erfolgt daher trotz der Verschiebung der Absorptionskante des CdS bei Veränderung der Temperatur²³⁾ immer im Grundgittergebiet.

Die Lichtintensität kann durch Drahtnetze verschiedener Maschenweite bis zu einem Verhältnis 1:1000 verändert werden.

Mit einer unter einem Winkel von 45° in den Strahlengang eingeschalteten planparallelen Glasplatte werden einige Prozent der Lichtintensität zur Kontrolle der Intensitäts-Konstanz auf eine Sperrschichtzelle geworfen. Die Temperaturbestimmung erfolgt durch ein unmittelbar am Kristall befindliches Cu-Korstantan-Thermoelement. Aus mehreren Vorratsgefäßen kann die Vakuumapparatur nach Belieben mit verschiedenen Gasen gefüllt werden. Die Leitfähigkeitsbestimmung der Kristalle erfolgte entweder mit Meßbrücken (Gleich- oder Wechselstrombetrieb) oder nach der Strom-Spannungsmethode.

Die Zeit zum Aufheizen (und auch Abkühlen) der Kristalle wurde zwischen einer und sechs Stunden variiert. Innerhalb dieses Bereiches zeigten sich keine wesentlichen Beeinflussungen des gemessenen Kurvenverlaufes. Der Dunkelwiderstand der Kristalle lag bei niedrigen Temperaturen öfters in der Gegend des Isolationswiderstandes der Meßapparatur, diese Bereiche sind in den Abbildungen der Meßergebnisse gestrichelt angedeutet.

²²⁾ R. Frerichs, Physic. Rev. **72**, 594 (1947).

3. Dunkelleitfähigkeit

31. Leitfähigkeitsverlauf im Vakuum

In den Abbildungen 2–8 ist das allen durchgemessenen Kristallen gemeinsame charakteristische Verhalten des Dunkelstromes bzw. der Dunkelleitfähigkeit dargestellt. Es ist jeweils der Logarithmus der Leitfähigkeit (in willkürlichem Maßstab) gegen die reziproke Temperatur aufgetragen (außer bei Abb. 4). Abb. 2 zeigt den Leitfähigkeitsverlauf beim Erwärmen der Kristalle im Vakuum. Der Dunkelstrom steigt zunächst, ausgehend von Zimmertemperatur, langsam an (Kurve 1). Bei etwa 150°C beginnt ein steiler, geradliniger Anstieg. Nimmt man für die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit σ einen Ausdruck von der Form

$$\sigma = \text{const} \cdot e^{-\frac{\Delta\epsilon}{2kT}} \quad (1)$$

an (k : Boltzmann-Konstante, T : abs. Temperatur), so ergibt sich aus der Neigung des geradlinigen Teiles der Kurve 1 ein $\Delta\epsilon$, dessen Größe bei den einzelnen Kristallen zwischen 2,5 und 3 eV liegt.

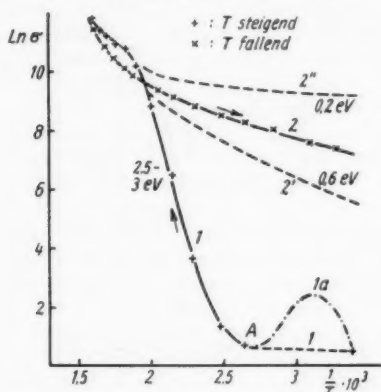


Abb. 2. Dunkelleitfähigkeit beim Ausheizen im Vakuum

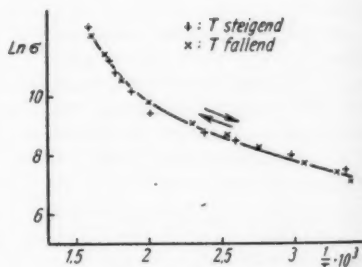


Abb. 3. Wiederholung der Leitfähigkeitsmessung im Vakuum

Ab $280\text{--}300^{\circ}\text{C}$ verläuft die Temperatur-Leitfähigkeitskurve meist etwas flacher, um ab 380°C erneut mit etwa 3 eV anzusteigen. Viele Kristalle zeigen im Gebiet bis etwa 150°C ein Maximum im Temperaturverlauf (Beispiel Kurve 1a in Abb. 3), das unter gewissen Bedingungen verschwindet²³⁾.

Beim Abkühlen der Kristalle im Vakuum erhält man die Kurve 2 der Abb. 2. Die Neigung dieser Abkühlungskurven ist bei den einzelnen Kristallen verschieden und streut etwa in dem durch Kurve 2' und Kurve 2'' angedeuteten Bereich. Bei niedrigen Temperaturen verlaufen diese Abkühlungskurven oft geradlinig mit einer Neigung zwischen 0,2 und 0,6 eV. Die Dunkelleitfähigkeit bei Zimmertemperatur ist nunmehr erheblich größer als der Ausgangswert (oft um einige Größenordnungen).

²³⁾ W. Muscheid, Ann. Physik (6) 13, 322 (1953).

Hält man das Vakuum weiterhin aufrecht und mißt nochmals die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit, so ergibt sich der in Abb. 3 dargestellte Verlauf. Sowohl bei steigender als auch bei sinkender Temperatur liegen die Meßpunkte auf Kurven, die sich in guter Näherung mit der jungfräulichen Abkühlungskurve nach dem Ausheizen im Vakuum (Kurve 2 der Abb. 2) decken. Die Kristalle befinden sich also nach dem Ausheizen im Vakuum in einem stationären Zustand.

32. Leitfähigkeitserniedrigung durch Sauerstoff

Die durch das Ausheizen der Kristalle im Vakuum erreichte Leitfähigkeitserhöhung kann zum größten Teil durch Sauerstoff wieder rückgängig gemacht werden. Läßt man nach einer

derartigen Behandlung bei Zimmertemperatur Sauerstoff in das Vakuumgefäß einströmen, so sinkt die Leitfähigkeit des Kristalls zunächst innerhalb weniger Sekunden um einen verhältnismäßig geringen Betrag ab. Die beiden Kurven der Abb. 4 zeigen die Dunkelstromabnahme als Funktion der Zeit beim Einlaß von Sauerstoff, beide an demselben Kristall gemessen. Nach dem steilen Abfall setzt eine langsame Abnahme um einen wesentlich größeren Betrag ein, die sich über längere Zeiträume erstreckt (Größenordnung 10–60 Minuten). Diese Leitfähigkeitserniedrigung der Kristalle ist in einem Sauerstoff-Druckbereich von 2–760 mm Hg druckunabhängig.

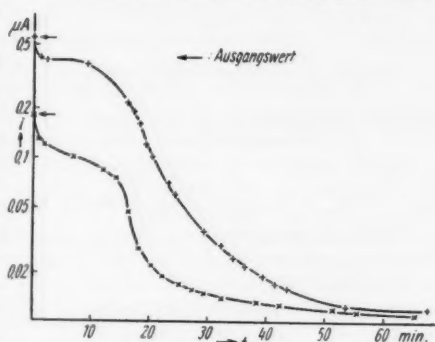


Abb. 4. Abnahme des Dunkelstromes nach Einlaß von Sauerstoff

Im allgemeinen wird hierbei der ursprüngliche Ausgangswert der Leitfähigkeit fast wieder erreicht. Bei Einlaß von Luft oder H_2S beobachtet man im wesentlichen dasselbe Verhalten.

Wird die Luft bzw. der Sauerstoff wieder abgepumpt, so behält der Kristall seine durch den Sauerstoffeinlaß erreichte geringe Leitfähigkeit bei, in einigen Fällen zeigt sich eine nur schwache Zunahme um wenige Prozent. Bei einer Wiederholung der Vakuummessung erhält man die Kurven der Abb. 5. Sie zeigen einen der ersten Messung ähnlichen Verlauf (Abb. 2), der steile Anstieg beim Erwärmen ist infolge des etwas höheren Ausgangswertes meist etwas flacher, die Abkühlungskurven decken sich relativ gut.

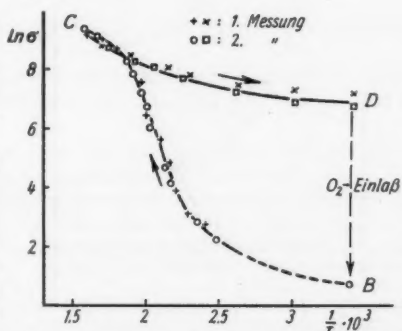


Abb. 5. Dunkelleitfähigkeit bei Einlaß von Sauerstoff und Wiederholung des Ausheizens im Vakuum

Ein erneuter Sauerstoffeinlaß bei Zimmertemperatur läßt die Leitfähigkeit wieder absinken, und man kann nach Abpumpen des Sauerstoffes im Vakuum

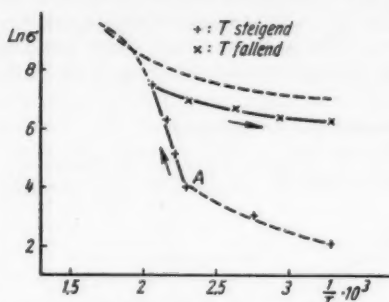


Abb. 6. Dunkelleitfähigkeit beim Ausheizen im Vakuum

den Kurvenzug $B-C-D$ nochmals durchfahren (Abb. 5). Die Maximaltemperatur, bis zu der die Kristalle hierbei erhitzt werden können, beträgt etwa 380°C . Beim Überschreiten dieses Wertes treten meist irreversible Veränderungen auf.

Eine Erwärmung der Kristalle im Vakuum bis etwa 200°C liefert den in Abb. 6 dargestellten Temperaturgang der Dunkelleitfähigkeit. Die Abkühlungskurve liegt bei etwas niedrigeren Leitfähigkeitswerten, sie zeigt aber bereits den charakteristischen flachen Verlauf.

33. Tempern in Sauerstoff

Wird ein zunächst im Vakuum ausgeheizter Kristall durch Sauerstoff bei Zimmertemperatur wieder auf einen niedrigen Leitfähigkeitswert gebracht und in Sauerstoff erhitzt, so erhält man etwa die Kurve 4 der Abb. 7. Derartige Meßkurven zeigen starke Schwankungen bei den einzelnen Exemplaren, und werden

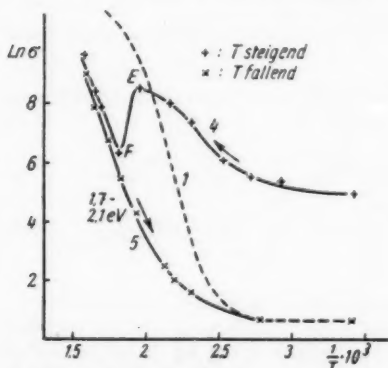


Abb. 7. Dunkelleitfähigkeit in Sauerstoff nach vorherigem Ausheizen im Vakuum

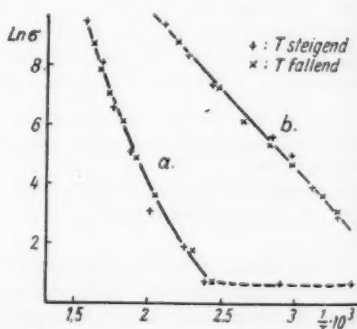


Abb. 8. a) Wiederholung der Leitfähigkeitmessung in Sauerstoff, b) Dunkelleitfähigkeit in Sauerstoff nach 40stündiger Temperung in Sauerstoff bei 300°C

auch wesentlich von der Aufheizgeschwindigkeit beeinflusst. Meist tritt ein mehr oder weniger ausgeprägtes Maximum (E) im Gebiet von $200-250^\circ \text{C}$ auf.

Nach diesem Maximum folgt ein steiler geradliniger Anstieg (F). Dieser Teil der Kurve 4 wird beim Abkühlen wieder in anderer Richtung durchfahren und setzt sich bis etwa 150°C fort. Hier erreicht die Leitfähigkeit meist sehr niedrige

Werte. Gl. 1 liefert für die Neigung des geraden Abfalls ein $\Delta\epsilon$ von 1,7–2,1 eV, je nach Kristall. Diese Abkühlungskurven liegen immer unterhalb der Ausheizungskurven im Vakuum (Kurve 1 der Abb. 2, in Abb. 7 gestrichelt eingetragen).

Ein nochmaliges Erwärmen und Abkühlen der Kristalle in Sauerstoff liefert die Kurve a der Abb. 8. Im wesentlichen wird hierbei in beiden Richtungen die Kurve 5 der Abb. 7 nochmals durchfahren. Die Abweichungen liegen innerhalb der Meßgenauigkeit, die Kristalle zeigen also auch in diesem sauerstoffgesättigten Zustand ein stationäres Verhalten.

Hat man mit einem Kristall sämtliche in den Abb. 3–7 dargestellten Messungen durchgeführt, so kann man an demselben Exemplar nochmals dieselben Messungen wiederholen. Im prinzipiellen zeigt der Kristall hierbei dasselbe Verhalten. Wie bereits erwähnt, betragen die Aufheiz- und Abkühlungsgeschwindigkeiten bei Aufnahme der Kurven etwa einige Grad pro Minute. Nach Erwärmen in Sauerstoff mit diesen Geschwindigkeiten erhält man die steile reversible Temperatur-Leitfähigkeitskurve a der Abb. 8, die bei sehr niedrigen Leitfähigkeitswerten liegt. Werden dagegen die Kristalle längere Zeit bei hohen Temperaturen in Sauerstoff getempert, so ergeben sich wiederum charakteristische Veränderungen im Dunkelstromverlauf, wie Kurve b der Abb. 8 zeigt. Nach einer 40stündigen Temperung in Sauerstoff bei 300°C ist die Dunkelleitfähigkeit erheblich gestiegen und die Kurvenneigung liegt nunmehr bei etwa 0,9 eV (häufig erhält man noch geringere Werte). Dieser Leitfähigkeitsverlauf ist auch wieder reproduzierbar, die Kurve b läßt sich bei Anwendung der o. a. Geschwindigkeiten in beiden Richtungen mehrfach durchfahren.

34. Fehlordnungsmo~~del~~

Versucht man, die experimentellen Ergebnisse in ein Modell einzuordnen, so müssen zunächst folgende Tatsachen gedeutet werden:

a) Sowohl der mit Sauerstoff (bzw. Schwefel) gesättigte als auch der im Vakuum ausgeheizte, d. h. der entgaste Kristall besitzen eine definierte Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit (Abb. 3 und 8a), die sich in charakteristischer Weise voneinander unterscheidet.

b) Bei ein- und demselben Exemplar sind beide Zustände in erster Näherung wiederholt zu reproduzieren.

c) Der (durch langes Tempern) mit Sauerstoff übersättigte Kristall zeigt ebenfalls einen definierten Temperatur-Leitfähigkeitsverlauf (Abb. 8b), der sich von a) unterscheidet.

Wie mannigfaltige Untersuchungen*) an Halbleitern zeigen, wird der Temperaturgang der Leitfähigkeit wesentlich von der Art, der Konzentration und der energetischen Lage der Störstellen beeinflusst. Eine Änderung des Temperatur-Leitfähigkeitsverlaufs bedeutet also eine Änderung der Störstellenverhältnisse im Kristall. Die Ursachen derartiger Änderungen kann man in zwei Gruppen einteilen:

1. Der thermodynamisch bedingte Eigenfehlordnungsgrad wächst mit steigender Temperatur und kann beim Abkühlen in verschiedenem Maße „eingefroren“ sein. (Frenkel- oder Schottkyfehlordnung).

2. Die Zusammensetzung des Kristalls ändert sich durch Ein- oder Ausbau von gittereigenen oder gitterfremden Bestandteilen.

Die Herstellung der CdS-Kristalle erfolgt durch Sublimation aus der Gasphase bei etwa 900°C. Bei diesen hohen Temperaturen haben die Kristalle sicher einen

beträchtlichen Eigenfehlordnungsgrad. Man kann annehmen, daß von dieser Eigenfehlordnung ein größerer Anteil beim Abkühlen auf Zimmertemperatur eingefroren bleibt, da die Einstellzeiten für den Gleichgewichtszustand bei niedrigeren Temperaturen sehr groß sind²⁴⁾. Die unter 1. genannte Möglichkeit kann aber mit ziemlicher Sicherheit zur Erklärung der Meßergebnisse ausgeschlossen werden. Die mehrfache Reproduzierbarkeit der beiden Grenzfälle (Abb. 3 und 8a) bei etwa gleichen Aufheiz- und Abkühlgeschwindigkeiten läßt sich durch Änderung der Eigenfehlordnung nicht erklären. Dasselbe gilt auch für die Tatsache, daß der größte Teil der Umwandlung in relativ kurzer Zeit schon bei Zimmertemperatur erfolgt (Abb. 4).

Man kann infolgedessen annehmen, daß die Störstellenänderung im wesentlichen durch Ein- und Ausbau von Sauerstoff hervorgerufen wird. Bei der Diskussion der hierfür in Frage kommenden Fehlordnungstypen muß zunächst berücksichtigt werden, daß die CdS-Kristalle im allgemeinen zur Gruppe der überschuleitenden Halbleiter gehören. Die Leitfähigkeit beruht also zum weitaus überwiegenden Teil auf Elektronenbewegung im Leitfähigkeitsband, wie man aus dem Vorzeichen des Halleffektes folgern kann (Diedrich²⁵⁾, Bube²⁶⁾ und eigene Messungen). Weiterhin sind die Größenverhältnisse der Atom- bzw. Ionenradien zu beachten.

Untersucht man die denkmöglichen Fehlordnungstypen im Hinblick auf obige Forderungen, so erscheint das im folgenden dargestellte Fehlordnungsmodell am ehesten geeignet, die Meßergebnisse zu deuten. Da die hohe Dunkelleitfähigkeit der im Vakuum ausgeheizten Kristalle größtenteils durch Sauerstoff wieder rückgängig gemacht werden kann (Abb. 4 und 5), können wir annehmen, daß die Kristalle beim Erhitzen im Vakuum Sauerstoff und u. U. auch locker gebundenen Schwefel abgeben, letzteres vor allem beim jungfräulichen Erwärmen. Die ausgeheizten oder entgasten Kristalle haben wegen der höheren Leitfähigkeit auch eine höhere Störstellenkonzentration, also werden beim Erhitzen nicht überzählige Atome abgegeben, sondern solche, die auf regulären Gitterplätzen sitzen.

Ein auszubauendes Metalloid-Ion gibt zwei Elektronen ab, die zum Ausgleich der Ladungsbilanz von den umgebenden Cd-Ionen aufgenommen werden¹¹⁾. Durch diese Fehlstellen entstehen Donatorenterme unterhalb des Leitungsbandes, die thermisch leicht ionisiert werden können und eine relativ hohe Leitfähigkeit zur Folge haben. Die Kristalle könnten evtl. schon bei der Herstellung Schwefellücken aufweisen. Kommt ein derart fehlgeordneter Kristall dann mit dem Luftsauerstoff in Berührung, so diffundieren Sauerstoffatome in den Kristall, besetzen die Schwefellücken und beseitigen damit den größten Teil der Donatoren. Eine sehr geringe Dunkelleitfähigkeit ist die Folge.

Beim Erhitzen derartiger Kristalle im Vakuum wird der Sauerstoff und vielleicht in geringem Maße auch Schwefel wieder abgegeben. Neben der Zunahme der Donatorenionisation mit steigender Temperatur werden dadurch laufend neue Donatoren erzeugt, die Leitfähigkeit steigt sehr steil an (Abb. 2, Kurve 1). Beim Abkühlen im Vakuum wird die hohe Donatorenkonzentration beibehalten und infolgedessen beobachtet man eine entsprechend große Leitfähigkeit auch bei Zimmertemperatur. Die verschiedene Lage der Abkühlungskurven im Vakuum (Abb. 2, Kurven 2, 2' und 2'') ist auf den unterschiedlichen Störstellenabstand der einzelnen Exemplare zurückzuführen.

²⁴⁾ N. F. Mott u. R. W. Gurney, *Electronic Processes in Ionic Crystals*, Oxford 1948.

²⁵⁾ H. Diedrich, *Ann. Physik* (6) **13**, 349 (1953).

²⁶⁾ R. H. Bube, *Physic. Rev.* **83**, 393 (1951).

Aus Abb. 6 kann man schließen, daß der Ausbau des Sauerstoffs im Vakuum ab etwa 150°C einsetzt, zu Beginn des geradlinigen Anstiegs der Temperaturleitfähigkeitskurven (Punkt A der Abb. 2 und 6). Hat man nämlich erst einmal bis in den Bereich des geradlinigen Anstiegs erwärmt, so zeigen die Abkühlungskurven bereits den flachen Verlauf der entgasten Kristalle.

Werden die Kristalle nach Ausheizen im Vakuum und Sauerstoffeinlaß in Sauerstoff oder Luft erwärmt, so steigt die Leitfähigkeit infolge Ionisation der noch vorhandenen Störstellen zunächst langsam an. Daneben diffundieren aber in steigendem Maße Sauerstoffatome in die restlichen Schwefellücken und verursachen eine Abnahme der Leitfähigkeit mit steigender Temperatur, so daß der Leitfähigkeitsverlauf bei höheren Temperaturen schließlich durch ein Minimum geht (Abb. 7).

Die in Sauerstoff getemperten Kristalle zeigen beim Erwärmen und Abkühlen in Sauerstoff ein reproduzierbares Verhalten, wenn die Messung in einem Zeitraum bis zu einigen Stunden durchgeführt wird (Abb. 8a). Wir haben aber gesehen, daß sich die steile Temperatur-Leitfähigkeitskurve dieser sauerstoffgesättigten Kristalle durch sehr langes Tempern in Sauerstoff bei hohen Temperaturen nach höheren Leitfähigkeitswerten verschiebt (Abb. 8b). Im Rahmen unseres Modells hätten wir also jetzt einen Kristall mit Metalloidüberschuß vor uns (z. B. Sauerstoff auf Zwischengitter), d. h. einen Kristall mit Akzeptoren oder Haftstellen im verbotenen Bereich.

Es erscheint allerdings zweifelhaft, ob hierbei die Überschußleitung des CdS in eine Defektleitung übergeht. Zur Klärung dieser Frage wären Messungen des Halleffektes in Abhängigkeit von der Temperatur zweckmäßig, da das Vorzeichen der Hallkonstante vom Vorherrschen der Überschuß- oder der Defektleitung bestimmt wird.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß die vorgeschlagene Modellvorstellung in erster Näherung das beobachtete Verhalten der Dunkel leitfähigkeit der CdS-Kristalle deuten kann.

K. W. Böer¹⁷⁾ untersuchte bereits die Temperaturabhängigkeit der Dunkel leitfähigkeit von CdS-Kristallen in etwa dem gleichen Temperaturgebiet. Diese Messungen wurden in höchstgereinigtem Stickstoff mit Aufheiz- und Abkühlungsgeschwindigkeiten von einigen Grad pro sec. durchgeführt, also etwa 100–200 mal schneller als die unseren.

Böer findet auch einen steilen Anstieg der „jungfräulichen“ Meßkurve, der sich nicht reproduzieren läßt und nicht diskutiert wird. Werden an demselben Exemplar weitere Meßreihen durchgeführt, so ergeben sich wesentlich flachere Kurven. Diese lassen sich nur bei Anwendung der hohen Meßgeschwindigkeit in erster Näherung reproduzieren, die Leitfähigkeit steigt aber im allgemeinen noch von Meßreihe zu Meßreihe an (vgl. Abb. 8–11 l. c.). Im Rahmen unserer Vorstellungen kann das Verhalten der jungfräulichen Kurven durch Ausbau von Sauerstoff und locker gebundenen Schwefel erklärt werden. Die Zunahme der Leitfähigkeit bei den weiteren Meßreihen deutet darauf hin, daß dieser Ausbau durch die hohen Aufheizgeschwindigkeiten und evtl. durch nicht ausreichende Erwärmung noch nicht bis zum Maximum erfolgt ist, sondern daß von Meßreihe zu Meßreihe noch weiterhin Sauerstoff abgegeben wird.

35. Elektronenkonzentrationen

Unter Annahme einer Maxwell-Boltzmann-Verteilung der Elektronen läßt sich die Elektronenkonzentration n im Leitungsband eines Eigenhalbleiters nach Wilson²⁷⁾ wie folgt berechnen:

$$n = \frac{1}{4} \left(\frac{8 \pi m_2^* k T}{h^2} \right)^{3/2} \cdot \left(\frac{m_1^*}{m_2^*} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{\Delta \epsilon}{2kT}}. \quad (2)$$

Hierin bedeutet:

$\Delta \epsilon$: energetischer Abstand zwischen Valenz- und Leitungsband.

m_1^*, m_2^* : effektive Elektronenmasse im Valenz- bzw. Leitungsband.

k : Boltzmannfaktor.

h : Plancksche Konstante.

Für nicht zu niedrige Temperaturen wird die Temperaturabhängigkeit von n nach Gl. 2 im wesentlichen durch den e -Faktor bestimmt.

Bei reiner Überschußleitung gilt für die Leitfähigkeit:

$$\sigma = n \cdot e \cdot b \quad (3)$$

(e = Elementarladung, b = Elektronenbeweglichkeit).

Da man die Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit hier vernachlässigen kann, verläuft also die Leitfähigkeit eines idealen Kristalls im $\ln \sigma / \frac{1}{T}$ Diagramm in erster Näherung linear und aus der Steigung der Geraden kann der Bandabstand $\Delta \epsilon$ berechnet werden (Eigenhalbleiter). Ein derartiges Verhalten ist bisher nur in sehr wenigen Fällen²⁸⁾ gefunden worden.

Bei CdS ist ein Bandabstand von etwa 2–2,5 eV zu erwarten²⁹⁾. Die Kurven der sauerstoffsättigten Kristalle (Abb. 8a) zeigen Werte in dieser Größenordnung. Berechnet man hiermit n nach Gl. 2 (mit der Näherung $m^* = \text{Elektronenmasse } m$), so ergeben sich die in Tab. 2, Spalte 3, Nr. 1–3 für drei Exemplare angegebenen Werte. In der vierten Spalte der Tab. 2 sind die aus der gemessenen Leitfähigkeit und den Kristalldimensionen folgenden Werte für $n = \sigma / e \cdot b$ angegeben. Hierbei wurde für b ein Wert von 50 cm²/Volt · sec angenommen, eine Größe, die aus den bisher vorliegenden Bestimmungen von b plausibel erscheint.

Tabelle 2

Nr.	$\Delta \epsilon$	n berechn.	n gemess.	N_s berechn.
1	2,07 eV	$2,1 \cdot 10^{10}$ cm ³	$1,2 \cdot 10^{11}$ cm ³	$4,8 \cdot 10^{20}$ cm ³
2	1,83 eV	$2,6 \cdot 10^{11}$ cm ³	$7,8 \cdot 10^{11}$ cm ³	$1,4 \cdot 10^{20}$ cm ³
3	2,0 eV	$4,8 \cdot 10^{10}$ cm ³	$3,7 \cdot 10^{10}$ cm ³	$0,9 \cdot 10^{10}$ cm ³
4	0,93 eV	—	$1,8 \cdot 10^{13}$ cm ³	$4,0 \cdot 10^{14}$ cm ³

Trotzdem die Übereinstimmung zwischen $n_{\text{ber.}}$ und $n_{\text{gem.}}$ gut erscheint, kann dies infolge der vielen Fehlerquellen wohl noch nicht als ein sicherer Beweis einer Eigenhalbleitung angesehen werden.

Die beim Erwärmen der sauerstoffsättigten Kristalle im Vakuum erhaltenen Geraden zeigen auch Neigungen mit den für den Bandabstand zu erwartenden

²⁷⁾ A. H. Wilson, Proc. Roy. Soc. London **133**, 458 (1931); **134**, 277 (1932).

²⁸⁾ J. Stuke, Diss. Göttingen (1947).

²⁹⁾ Lee Gildart u. A. W. Ewald, Physic. Rev. **83**, 359 (1951).

Größen (Abb. 2, Kurve 1). Hier liegen die Werte für $n_{\text{gem.}}$ um 3–7 Größenordnungen über den aus Gl. 2 berechneten. Eine Übereinstimmung ist im Rahmen unserer Modellvorstellung auch keineswegs zu erwarten. Da die sauerstoffgesättigten Kristalle beim Erwärmen im Vakuum laufend Sauerstoff abgeben, sind die Voraussetzungen zur Gültigkeit der Gl. 2 nicht gegeben.

Im Gegensatz zum idealen eigenhalbleitenden Kristall wird die Leitfähigkeit der Realkristalle wesentlich durch Fremd- oder Eigenfehlordnung und auch durch Gitterbaufehlstellen bestimmt. Sind die durch derartige Fehler im Kristall hervorgerufenen Störterm Elektronenspenden (Donatoren) eines einzigen Energieniveaus, dann erhält man nach Wilson²⁰⁾ die Elektronenkonzentration n_s im Leitungsband aus:

$$n_s = \frac{1}{2} \left(\frac{8 \pi m_s^* k T}{h^2} \right)^{1/2} N_s^{1/2} \cdot e^{-\frac{\Delta \epsilon_s}{2kT}} \quad (4)$$

(N_s = Konzentration der Donatoren, $\Delta \epsilon_s$ = energetischer Abstand Störniveau—Leitungsband).

Gl. 4 gilt auch für Löcherleitung im Valenzband, wenn m_s^* durch m_1^* ersetzt wird. N_s ist dann gleich der Akzeptorkonzentration und $\Delta \epsilon_s$ gleich dem Abstand Akzeptorenniveau—Valenzband.

Gl. 4 gilt nur unter der Voraussetzung, daß $\Delta \epsilon_s$ groß gegen $2kT$ ist und die Elektronenkonzentration nicht zu große Werte annimmt (n_s muß klein gegen N_s bleiben). Da in einem Halbleiter gleichzeitig sowohl Donatoren als auch Akzeptoren verschiedener Konzentration (und evtl. variabler Aktivierungsenergie) vorhanden sein können, ist es nicht verwunderlich, daß im allgemeinen eine Berechnung von N_s mittels Gl. 4 nicht gelingt.

Dies ist auch bei den im Vakuum ausgeheizten Kristallen, die offensichtlich Störstellenleitung zeigen (Abb. 2, Kurven 2, 2', 2''), nicht der Fall.

Man erhält für N_s Werte (mit $n_s = n$ aus Gl. 3), die um mehrere Größenordnungen unter den zugehörigen n_s -Werten liegen.

In der letzten Spalte der Tab. 2, Nr. 1–3, sind die nach Gl. 4 berechneten N_s -Werte für einige sauerstoffgesättigte Kristalle angegeben. Sie erscheinen zwar etwas zu groß, trotzdem kommt als weitere Deutungsmöglichkeit der entsprechenden Meßkurven (Abb. 8a) außer Eigenleitung auch Störstellenleitung in Frage, bei der es sich wegen der großen $\Delta \epsilon_s$ -Werte um eine Ionisation der Aktivatorterme handeln könnte (vgl. Abschn. 43).

In der letzten Zeile der Tab. 2 sind noch die Werte für n und N_s von einem stark sauerstoffübersättigten Kristall angegeben, die in vernünftigen Größenordnungen liegen.

Während in Metallen die Elektronenkonzentrationen so groß sind, daß mit völliger Entartung gerechnet werden kann, beruhen die Wilsonschen Überlegungen auf der Annahme einer Maxwell-Boltzmann-Verteilung der Elektronen. Obwohl die Elektronenkonzentration in Halbleitern mit steigender Temperatur stark zunimmt, werden die bei den Metallen beobachteten hohen Werte nicht erreicht. Es können aber durchaus Konzentrationen auftreten, bei denen die Wilsonsche Näherung nicht mehr zulässig ist. Dies ist oberhalb der „kritischen Dichte“

$$n_{\text{krit.}} = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{8 \pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \quad (5)$$

der Fall⁹⁾. Hier beginnt das Gebiet der „schwachen Entartung“, das ausführlich von Shifrin³⁰⁾ behandelt worden ist. Nach diesem Verfahren konnten z. B. Busch und Labhart¹⁴⁾ ihre Leitfähigkeits- und Hallmessungen an SiC deuten.

Die Lage der Fermigrenze in einem Halbleiter ist temperaturabhängig (vor allem bei niedrigen Temperaturen) und wird erheblich von der Störstellenkonzentration beeinflusst, worauf besonders Müser³¹⁾ und Shockley³²⁾ hingewiesen haben. Andererseits wird die Elektronenkonzentration im Leitungsband und damit die Leitfähigkeit u. U. wesentlich von der Fermienergie mitbestimmt.

Sicherlich können bei einer Berücksichtigung derartiger Überlegungen auch unsere Messungen an CdS in bessere Übereinstimmung mit der Theorie gebracht werden. Ein Eingehen hierauf erscheint aber noch verfrüht, ehe nicht genaue Bestimmungen der Elektronenkonzentration gleichzeitig mit den Leitfähigkeitsmessungen durchgeführt sind.

4. Photoleitfähigkeit

Gleichzeitig mit der Dunkelleitfähigkeit wurde auch der Photostrom bei verschiedenen Lichtintensitäten gemessen. Kristalle mit guter Photoleitung zeigen hierbei das im folgenden geschilderte Verhalten.

4.1. Photostrom im Vakuum und in Sauerstoff

Wie wir gesehen haben, zeigt der Dunkelstrom der Kristalle sowohl im ausgeheizten Zustand im Vakuum (Abb. 4) als auch im sauerstoffgesättigten Zustand (Abb. 8a) ein reproduzierbares Verhalten beim Erwärmen und Abkühlen. Das-

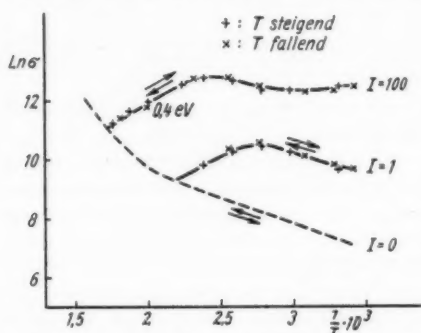


Abb. 9. Photostrom nach Ausheizen im Vakuum

selbe gilt auch für den Photostrom. Abb. 9 zeigt dies für den Vakuum-Fall. In beiden Temperaturrichtungen liegen auch hier die Meßpunkte in guter Näherung auf denselben Kurven. Der Photostromverlauf ist der Übersichtlichkeit halber nur für zwei Intensitäten I aufgetragen, die sich wie 1:100 verhalten. Die Kurve $I=0$ gibt den zugehörigen Dunkelstromverlauf wieder.

Bei geringen Lichtintensitäten steigt der Photostrom im Temperaturgebiet bis etwa 130°C zunächst etwas an. Dieser Photostromanstieg wird mit steigender Lichtintensität immer schwächer und geht bei größeren Intensitäten in einen Abfall über. Die Photostromkurven für jeweils gleiche Intensitäten nähern sich also in diesem Bereich immer mehr.

Nach einem Übergangsgebiet, in dem sämtliche Kurven durch ein Maximum gehen, beginnt ab $150\text{--}180^\circ\text{C}$ bei allen Intensitäten ein starker Abfall des Photostromes, bis die Photoleitung schließlich verschwindet. Dies tritt bei um so höheren

³⁰⁾ K. Shifrin, J. Phys. U.S.S.R. 8, 242 (1944).

³¹⁾ H. Müser, Z. Naturforsch. 5a, 18 (1950).

³²⁾ W. Shockley, Electrons and Holes in Semiconductors (1951).

Temperaturen ein, je höher die Lichtintensität ist. Dieser Photostromabfall verläuft in der exponentiellen Darstellung der Abb. 9 nahezu linear mit einer Neigung von etwa 0,4 eV.

Auch im störstellenarmen sauerstoffgesättigten Zustand decken sich die Photostromkurven der Kristalle in beiden Temperaturrichtungen ziemlich gut, wie aus Abb. 10 zu ersehen ist. Die Kurven zeigen im prinzipiellen denselben Verlauf wie in Abb. 9, die Minima und Maxima sind aber nunmehr flacher und nach höheren Temperaturen verschoben. Der exponentielle Abfall ist jetzt wesentlich steiler als im Vakuum, die Neigung entspricht einem Wert von etwa 0,9 eV.

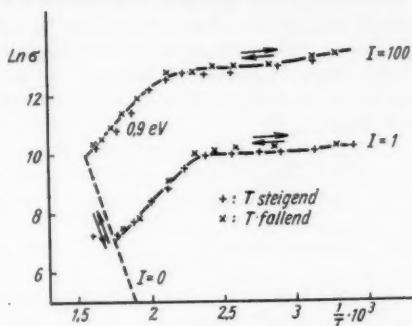


Abb. 10. Photostrom nach Erwärmen in Sauerstoff

42. Photoströme beim Einlaß von Sauerstoff

Beim ersten (jungfräulichen) Erwärmen der Kristalle im Vakuum zu Beginn der Messungen (Abb. 2) zeigen die Kristalle kein eindeutiges Verhalten, teils ist die Photoleitung nach dieser Behandlung geringer, teils größer geworden. Bringt

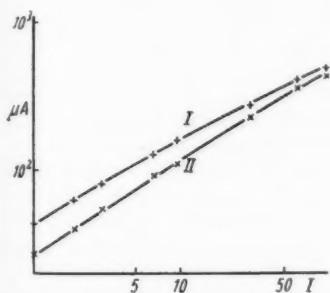


Abb. 11. Photostrom als Funktion der Lichtintensität. I: Im Vakuum ausgeheizt, II: Nach Einlaß von Sauerstoff

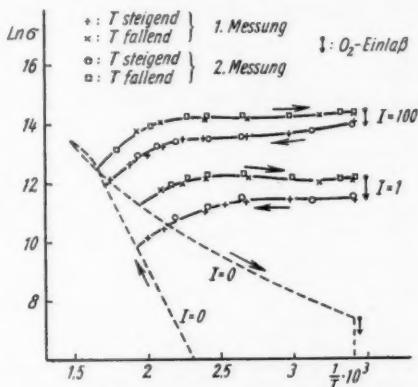


Abb. 12. Photostrom bei Einlaß von Sauerstoff und Wiederholung des Ausheizens im Vakuum

man aber die Kristalle nach dieser ersten Vakuumbehandlung bei Zimmertemperatur mit Sauerstoff (oder Luft) in Berührung, so nimmt in allen Fällen der Photostrom ab (Abb. 11). Diese Abnahme kann durch ein nochmaliges Ausheizen im Vakuum rückgängig gemacht werden, unabhängig von Verhalten der Kristalle bei der ersten Vakuumbehandlung. In ähnlicher Weise wie der Dunkelstrom (Abb. 6) verläuft also auch der Photostrom beim wiederholten Tempern im Vakuum und

Einlaß von Sauerstoff in Form eines Kreisprozesses, der sich mehrmals durchführen läßt. Dies zeigt Abb. 12.

Der Photostrom-Temperaturgang ähnelt dabei in beiden Temperaturrichtungen dem im vorigen Abschnitt erläuterten Verhalten. Die Photostromabnahme beim Einlaß von Sauerstoff erreicht aber bei weitem nicht die Größenordnungen der gleichzeitigen Dunkelstromabnahme, sie ist außerdem intensitätsabhängig: je geringer die Lichtintensität, desto größer ist die Abnahme nach Einlaß von Sauerstoff (Abb. 11).

Pumpt man den Sauerstoff wieder ab, so beobachtet man meist eine (sehr geringfügige) Vergrößerung des Photostromes.

Die Kurven der Abb. 12 können bei Wiederholung des Verfahrens (Ausheizen im Vakuum, dann Sauerstoffeinlaß bei Zimmertemperatur u. s. f.) ebenfalls mehrfach durchführen werden. Die Meßpunkte zweier derartiger Messungen sind in Abb. 12 eingetragen.

Auch beim Erwärmen der Kristalle in Sauerstoff oder Luft zeigt der Photostrom kein eindeutiges Verhalten. Es besteht aber folgender Zusammenhang zwischen dem ersten Tempern im Vakuum (Abb. 2) und dem ersten Tempern in Sauerstoff (Abb. 7): nimmt bei einem Exemplar der Photostrom bei der ersten Vakuumbehandlung ab, so zeigt sich eine Zunahme des Photostromes nach Erwärmen in Sauerstoff und umgekehrt.

43. Diskussion des Photostromverlaufes

Wie in Abschn. 41 gezeigt wurde, ist der Photostromverlauf bei den mit Sauerstoff gesättigten Kristallen in guter Näherung unabhängig von der Temperatur-

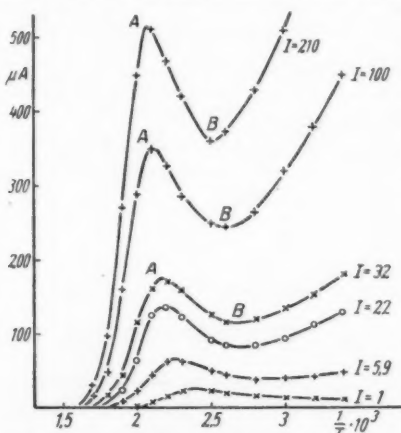


Abb. 13. Photostrom als Funktion von $1/T$ mit der Lichtintensität I als Parameter

richtung (Abb. 10). Trägt man den Photostrom für verschiedene Intensitäten I linear gegen $1/T$ auf, so erhält man die Kurvenschar der Abb. 13. In dieser Darstellung erkennt man deutlich die auftretenden Maxima (A) und Minima (B), die sich mit steigender Intensität nach höheren Temperaturen verschieben.

Dieselbe Struktur der Kurven beobachtet man auch bei den im Vakuum getemperten Kristallen. Die Ausbildung der Extremwerte ist bei den einzelnen Exemplaren allerdings sehr unterschiedlich, die gesättigten Kristalle zeigen meist den flacheren Verlauf.

Die Temperaturabhängigkeit des Photostromes ist von Niekisch³³⁾ im Gebiet zwischen Zimmertemperatur und der Temperatur der flüssigen

Luft untersucht worden. Ein Vergleich dieser Meßkurven (vgl. Abb. 1a—c, l. c.) mit Abb. 13 zeigt, daß man sich die rechten, mit steigender Temperatur ab-

³³⁾ E. A. Niekisch, Ann. Physik (6) 8, 291 (1951).

fallenden Kurvenäste der Abb. 13 recht gut als Fortsetzung der von Niekisch gemessenen Kurven vorstellen kann. Der nochmalige Anstieg des Photostromes bei höheren Temperaturen läßt sich aber mit den von Niekisch und Rompe³⁴⁾ vorgeschlagenen Deutungen der Meßergebnisse von Niekisch nicht mehr erklären. Einen besseren Überblick über die vorliegenden Verhältnisse gibt die Darstellungsweise der Abb. 14. Hier ist der Photostrom in Abhängigkeit von der Intensität doppeltlogarithmisch mit der Temperatur als Parameter aufgetragen (die Meßpunkte entsprechen denen der Abb. 13). Man sieht, daß die Kurven zunächst mit steigender Temperatur flacher werden, im Temperaturgebiet der Minima der Abb. 13 wird eine Neigung von etwa 0,5 erreicht. Weitere Temperaturerhöhung läßt die Kurven wieder ein wenig steiler werden. Nach Durchlaufen der Maxima (Abb. 13, A) nehmen die Photostromwerte ab, gleichzeitig werden die Kurven steiler und erreichen Neigungen in der Gegend von 1.

In vielen Fällen kommt man zur Beschreibung des photoelektrischen Verhaltens der CdS-Kristalle bereits mit einer relativ einfachen Rekombinationsgleichung von folgender Form aus³⁵⁾:

$$\frac{dn}{dt} = a - \alpha n - \beta n^2 \quad (6)$$

(a = absorbierte Energie; α , β = Rekombinationskoeffizienten).

Im stationären Fall ist $dn/dt = 0$ und man kann bei bekanntem α und β die Elektronenkonzentration

$$n = \frac{2a}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4a\beta}} \quad (8)$$

als Funktion von a ausrechnen.

Trägt man n gegen a doppeltlogarithmisch auf, so ergeben sich Kurven, deren Neigungen mit steigender Intensität von 1 zu 0,5 übergehen. Das Übergangsgebiet hängt dabei von dem Verhältnis α^2/β ab. Überwiegend bimolekulare Rekombination liefert die Neigung 0,5, überwiegend monomolekulare die Neigung 1.

Diese Überlegungen können wir bei Annahme einer Proportionalität zwischen Photostrom und Konzentration n (also unter Vernachlässigung einer evtl. Konzentrationsabhängigkeit der Beweglichkeit) auf die Kurven der Abb. 14 übertragen. Bei steigender Temperatur ist also zunächst ein Ansteigen der bimolekularen bzw. ein Abfall der monomolekularen Rekombination festzustellen. Nach dem Durch-

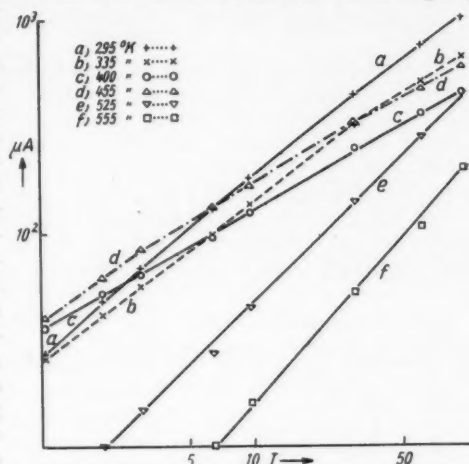


Abb. 14. Photostrom als Funktion der Intensität

³⁴⁾ E. A. Niekisch u. R. Rompe, Z. physik. Chem. **198**, 200 (1951).

³⁵⁾ J. Faßbender u. B. Seraphin, Ann. Physik (6) **10**, 374 (1952).

laufen der Minima (*B*, Abb. 13) wächst dagegen wieder der monomolekulare Anteil, der schließlich bei sehr hohen Temperaturen dominiert. Beim Einlaß von Sauerstoff auf die im Vakuum ausgeheizten Kristalle müßte man eine Zunahme der monomolekularen und eine Abnahme der bimolekularen Rekombination annehmen.

Als Grundlage zur Diskussion der photoelektrischen Eigenschaften von CdS-Kristallen ist schon häufig das aus der Lumineszenzphysik bekannte Riehl-Schönsche Bändermodell³⁶⁾ benutzt worden¹⁾. Dieses besitzt oberhalb des Valenzbandes *V* besetzte Aktivatorterme einer Konzentration *A*, die Elektronen abgeben können. Unterhalb des Leitungsbandes *L* wird die Existenz von unbesetzten Haftstellen der Konzentration *H* angenommen (Abb. 15).

Von den in diesem Modell denkmöglichen optischen und thermischen Übergängen sind die wichtigsten in Abb. 15 eingezeichnet. Durch Absorption von Licht im Grundgittergebiet wird der Übergang 1 vom Valenz- in das Leitungsband angeregt. Die hierbei entstehenden Löcher im Valenzband werden zu einem mehr oder weniger großen Teil durch 2 aufgefüllt. Der unter Lichtemission erfolgende Übergang 3 soll im wesentlichen bimolekular erfolgen, während 4 mit einer (oft angezweiferten) monomolekularen strahlungslosen Rekombination identifiziert wird³⁷⁾. Unter Energieabgabe verläuft weiterhin noch der Übergang 5; die Übergänge 6, 7 und 8 werden durch thermische Erregung hervorgerufen.

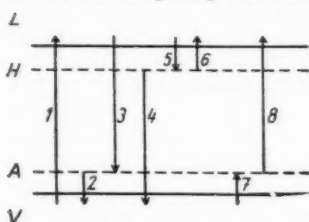


Abb. 15. Bänderschema

Durch reaktionskinetische Betrachtungen läßt sich ein Differentialgleichungssystem für die Ladungsträgerkonzentrationen in den einzelnen Termgruppen (n^- , h^- , a^+ , n^+) aufstellen, das aber in voller Allgemeinheit infolge der vielen bisher noch unbekannten Parameter nicht lösbar ist^{2) 38)}. Wir wollen hierauf nicht näher eingehen, sondern lediglich Vorschläge zur qualitativen Deutung der in Abb. 13 und 14 dargestellten Meßergebnisse machen.

Bestrahlt man einen Kristall bei Zimmertemperatur, so wird ein sehr großer Teil der Haftstellen mit Elektronen besetzt sein. Bei stationärer Belichtung ist also die Konzentration der Aktivatorlöcher a^+ größer als die im Leitfähigkeitsband vorhandene Elektronenkonzentration n^- . Eine scheinbar monomolekulare Rekombination ist die Folge, die um so mehr in Erscheinung tritt, je geringer die Lichtintensität und je größer die Störstellenkonzentration ist (Kurve *a*, Abb. 14).

Mit steigender Temperatur nimmt die Haftstellenbesetzung infolge des Übergangs 6, Abb. 15, laufend ab, bis bei etwa 120°C die Haftstellen praktisch leer sind. Jetzt ist $a^+ \approx n^-$, d. h. man beobachtet bimolekulare Rekombination (Kurve *b, c*, Abb. 14). Bei weiterer Temperaturerhöhung wächst schließlich die Löcherkonzentration infolge des thermischen Übergangs 8 wieder stark an und veranlaßt eine zunehmend monomolekular erscheinende Rekombination bei gleichzeitigem Abfall der Photoleitfähigkeit (Kurven *d, e, f* in Abb. 14).

Eine eindeutige Zuordnung physikalischer Prozesse zu den verschiedenen Rekombinationsvorgängen ist bisher trotz vieler Ansätze noch nicht zufrieden-

³⁶⁾ N. Riehl u. W. Schön, Z. Physik **114**, 682 (1939).

³⁷⁾ M. Schön, Z. Naturforschg. **6a**, 251 (1951).

stellend geglückt. Zur weiteren Klärung könnten vor allem Messungen der Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit, Lumineszenz, Ultrarotausleuchtung usw. beitragen. Wie bereits erläutert wurde (Abb. 13), sinkt bei hoher Lichtintensität der Photostrom zunächst mit steigender Temperatur, während er bei geringer Beleuchtung ansteigt. Ein analoges Verhalten kann man z. B. gelegentlich auch bei der Ultrarotausleuchtung feststellen. Wird bei konstanter Ultraroteinstrahlung die Grundgittereinstrahlung variiert, so beobachtet man bei hohen Intensitäten einen starken Tilgungseffekt, der mit sinkender Grundgitterintensität stetig abnimmt. Bei sehr geringen Grundgitterintensitäten tritt schließlich eine Vergrößerung des Photostromes durch die zusätzliche konstante Ultraroteinstrahlung auf, so daß ein Zusammenhang mit dem Photostrom-Temperaturverlauf von Zimmertemperatur bis zu den Punkten *B* (Abb. 13) sehr nahe liegt. Erfolgversprechend wäre bei derartigen Untersuchungen wohl auch die Anwendung des in den Anschnitten 32 und 42 geschilderten Kreisprozesses, da man hiermit an ein und demselben Exemplar in reproduzierbarer Weise die Störstellenverhältnisse ändern kann.

Herrn Prof. Dr. Möglich danke ich für viele Anregungen und stetes Interesse, desgl. Herrn Dr. Faßbender für mannigfaltige nützliche Ratschläge und Diskussionen.

Berlin-Buch, Institut für Festkörperforschung der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

(Eingegangen bei der Redaktion am 8. April 1953.)

Zum Nachweis von Haftstellen in CdS-Einkristallen

Von W. Muscheid

(Mit 7 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Die Dunkelleitfähigkeit von CdS-Einkristallen durchläuft beim Erwärmen oft Maxima im Gebiet von etwa 100° C. Diese Maxima verhalten sich analog den Glow-Kurven, sie treten nur auf, wenn die Kristalle vor Beginn des Erwärmens belichtet wurden. Mittels derartiger Messungen läßt sich zeigen, daß durch zusätzlichen Einbau von Sauerstoff in CdS-Kristallen Haftstellen erzeugt werden.

Das Riehl-Schönsche Bändermodell hat sich schon in vielen Fällen zur Diskussion der Lumineszenz und der photoelektrischen Eigenschaften von kristallinen Substanzen als brauchbar erwiesen¹⁾²⁾³⁾. In diesem Modell werden u. a. Haftstellen unterhalb des Leitungsbandes im verbotenen Bereich zwischen Valenz- und Leitungsband angenommen. Einen Hinweis auf die Existenz von Haftstellen liefert auch die Messung der Temperaturabhängigkeit der Dunkelleitfähigkeit von photoleitenden CdS-Einkristallen.

Bei derartigen Untersuchungen findet man häufig ein Maximum im Temperatur-Leitfähigkeitsverlauf im Gebiet von etwa 60–120° C⁴⁾. K. W. Boer⁴⁾ vermutete bereits, daß dies Verhalten der Dunkelleitfähigkeit auf einem Glow-Kurven-ähnlichen Effekt beruhen könnte. Glow-Kurven erhält man bekanntlich beim Erwärmen von angeregten Phosphoren, die auf niedrige Temperatur gebracht worden sind. Hierbei wird die eingefrorene Lichtsumme nicht kontinuierlich ausgestrahlt, sondern es treten mit steigender Temperatur ein oder mehrere Maxima der ausgestrahlten Lichtintensität auf. Diese verschieben sich bei Steigerung der Aufheizgeschwindigkeit etwas nach höheren Temperaturen⁶⁾⁷⁾.

Durch einige Messungen kann man zeigen, daß sich die oben erwähnten Dunkelleitfähigkeitsmaxima der CdS-Kristalle tatsächlich analog den Glow-Kurven verhalten. Die Kurve 1 der Abb. 1 gibt den Dunkelleitfähigkeitsverlauf beim Erwärmen eines Kristalls wieder, der vor Beginn dieser Messung belichtet wurde (Aufheizgeschwindigkeit etwa 10°/min). Nach Durchlaufen eines Maximums bei

¹⁾ J. Faßbender, *Ann. Physik* (6) **5**, 33 (1949).

²⁾ I. Broser u. R. Warminsky, *Ann. Physik* (6) **7**, 289 (1950).

³⁾ W. Muscheid, *Ann. Physik* (6) **13**, 305 (1953).

⁴⁾ K. W. Boer, *Ann. Physik* (6) **10**, 20 (1952).

⁵⁾ W. Muscheid, *l. c.*

⁶⁾ J. T. Randall u. M. H. F. Wilkins, *Proc. Roy. Soc. (London)* A **184**, 365, 390 (1945).

⁷⁾ G. F. J. Garlick u. A. F. Gibson, *Proc. phys. Soc.* **60**, 574 (1948).

360° K beginnt ab 440° K ein stetiger Anstieg der Leitfähigkeit⁸⁾). Beim Abkühlen des Kristalls erhält man die Kurve 2, die einen monotonen Abfall der Dunkelleitfähigkeit zeigt. Wird jetzt dieselbe Messung ohne vorherige Belichtung des Kristalls wiederholt, so durchfährt man in beiden Temperaturrichtungen

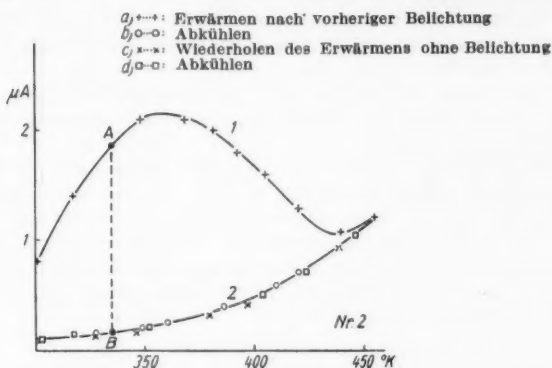


Abb. 1. Einfluß der Belichtung auf den Dunkelstromverlauf eines CdS-Einkristalls

nochmals die Kurve 2 (Meßpunkte × und □, Abb. 1). Erfolgt dagegen vor Beginn der Messung wieder eine Belichtung, so tritt auch das Maximum wieder auf.

Abb. 2 zeigt die Abhängigkeit der Lage des Maximums von der Aufheizgeschwindigkeit. Die Kurven 1 und 2 geben zwei Messungen mit den Geschwindigkeiten 5°/min und 15°/min wieder.

Vor Beginn der Messungen wurde der Kristall jeweils mit der gleichen Intensität belichtet. Auch die Zeit zwischen Abschalten der Belichtung und Beginn der Erwärmung ist in beiden Fällen die gleiche, so daß die Kurven bei demselben Dunkelstromwert beginnen. Man sieht, daß sich das Maximum mit steigender Aufheizgeschwindigkeit nach höheren Temperaturen verschiebt. Im Gegensatz hierzu hängt der Dunkelstromverlauf beim Abkühlen nicht von der Meßgeschwindigkeit ab, die Meßpunkte durchlaufen hierbei immer dieselben Kurven.

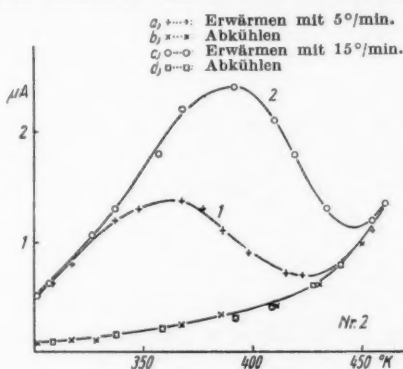


Abb. 2. Abhängigkeit des Dunkelstrom-Temperaturverlaufes von der Aufheizgeschwindigkeit

Im folgenden wählen wir für unsere Dunkelstromkurven mit einem nur bei vorheriger Belichtung auftretenden Maximum die Bezeichnung Ausheizkurven.

⁸⁾ W. Muscheid, l. c.

⁹⁾ K. W. Boer, l. c.

Es ist nicht notwendig, vor Beginn der Messung den Kristall mit der gleichen Intensität zu belichten, wenn man bei gleicher Aufheizgeschwindigkeit dieselbe Ausheizkurve erhalten will. Die Lage und Höhe des Maximums ist bei einem bestimmten Kristall lediglich von der Größe des Dunkelstromes abhängig, den der Kristall zu Beginn des Erwärmens hat.

Die in Abb. 1 und 2 dargestellten Meßergebnisse zeigen, daß unsere Haftstellen-Stromkurven in den beiden wesentlichen Punkten mit dem Verhalten der Glow-Kurven übereinstimmen. Diese sind:

1. Auftreten der Maxima nur bei vorheriger Belichtung.
2. Verschiebung der Maxima nach höheren Temperaturen bei Steigerung der Aufheizgeschwindigkeit.

Das Auftreten der Glow-Kurven erklärt man damit, daß bei der Belichtung zunächst die Haftstellen gefüllt werden. Die in den Haftstellen eingefrorenen Elektronen werden beim Erwärmen thermisch in das Leitungsband befördert, von wo sie leuchtend rekombinieren. Die Temperaturlage eines Glow-Kurven Maximums hängt nach dieser Auffassung also im wesentlichen von dem energetischen Abstand E der Haftstellen vom Leitungsband ab. Man erhält näherungsweise für diesen Abstand¹⁰⁾

$$E \approx 25 k \cdot T_h \quad [\text{eV}] \quad (1)$$

(k : Boltzmann-Konstante, T_h : Temperatur des Maximums in $^{\circ}\text{K}$).

Mehrere Glow-Kurven Maxima bei verschiedenen Temperaturen sind also verschiedenen Haftstellentermen zuzuordnen [der Einfluß der Aufheizgeschwindigkeit ist in (1) vernachlässigt]. Wie M. Schön¹¹⁾ gezeigt ist hat, aber bei derartigen Überlegungen Vorsicht geboten. Immerhin können wir annehmen, daß unsere Ausheizkurven auch durch thermische Elektronenübergänge von den Haftstellen

in das Leitungsband hervorgerufen werden. Aus Gl. (1) würde sich in unserem Falle für den Haftstellenabstand ein Wert von etwa 0,6 eV ergeben, zumindest eine plausible Größenordnung, da ähnliche Energien auch bei Temperatur-Leitfähigkeitsmessungen beobachtet werden¹²⁾. Für eine genaue qualitative Analyse reichen die bisherigen Untersuchungen noch nicht aus.

Werden die beim Erwärmen erhaltenen Dunkelstromwerte der Ausheizkurven in Abhängigkeit von der Zeit aufgetragen, so erhält man z. B. die Kurve 1 der

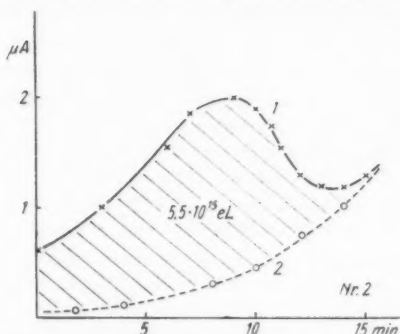


Abb. 3. Dunkelstrom in Abhängigkeit von der Zeit bei Aufnahme einer Haftstellen-Stromkurve

Abb. 3. Da die Abkühlungskurven (Kurve 2, Abb. 1) von der Meßgeschwindigkeit unabhängig sind, kann man jedem Punkt der Kurve 1, Abb. 3, der einer bestimmten Temperatur entspricht, einen Punkt gleicher Temperatur der Ab-

¹⁰⁾ J. T. Randall u. M. H. F. Wilkins, l. c.

¹¹⁾ M. Schön, Naturwiss. **38**, 235 (1951).

¹²⁾ W. Muscheid, l. c.

kühlungskurve zuordnen. In Abb. 1 gehört z. B. in diesem Sinne zu Punkt *A* der Haftstellen-Stromkurve der Punkt *B* der Abkühlungskurve. Diese Werte sind in Abb. 3 mit eingetragen (Kurve 2). Die von den Kurven 1 und 2 der Abb. 3 eingeschlossene Fläche hat die Dimension einer Ladung. Die Auswertung derartiger Flächen liefert bei den einzelnen Exemplaren Ladungen in der Größenordnung 10^{15} – 10^{17} Elementar-Ladungen (eL). Diese Werte hängen in geringem Maße von der Aufheizgeschwindigkeit ab. In einem Falle ergab sich beispielsweise bei $2^\circ/\text{min}$ $8 \cdot 10^{15}$ und bei $15^\circ/\text{min}$ $5,5 \cdot 10^{15}$ eL. Dies Verhalten kann damit erklärt werden, daß bei größerer Aufheizgeschwindigkeit die (von der Elektronenkonzentration im Leitungsband abhängige) Rekombination schneller vonstatten geht, also die mittlere Lebensdauer der Elektronen bei größerer Aufheizgeschwindigkeit verkleinert wird.

Eine weitere Stütze der Deutung der Ausheizkurven liefert die Abb. 4. Hier wurde die gleichmäßige Erwärmung nach Erreichen des Maximums (Punkt *A*) abgebrochen. Bei konstanter Temperatur nimmt nunmehr der Dunkelstrom durch Entleeren der Haftstellen und Rekombination der Elektronen stetig ab. Nach Abfall des Stromes auf den Wert *B* wurde die Erwärmung fortgesetzt. Das kleine Maximum *C* bei 400°K zeigt, daß die Haftstellen noch nicht völlig entleert waren. Abb. 5 gibt diesen Kurvenverlauf in Abhängigkeit von der Zeit wieder.

Über die physikalischen Ursachen bzw. die Natur der Haftstellen in CdS-Einkristallen ist bisher kaum etwas bekannt. Aus zahlreichen Untersuchungen an zusammengesetzten Halbleitern weiß man aber, daß durch Metalloidüberschuß Elektronenfängerstellen im verbotenen Energiebereich zwischen Valenz- und Leitungsband hervorgerufen werden¹³⁾. Es liegt daher nahe, bei zusätzlichem Einbau von Metalloiden in Photohalbleitern auch eine Vergrößerung der Haftstellenkonzentration anzunehmen. Diese Annahme läßt sich in einfacher Weise mittels unserer Ausheizkurven stützen. Die Kurven 1, 1' der Abb. 6 wurden bei Kristall Nr. 3 in der bei Abb. 3 erläuterten Weise erhalten. Nach einer 20stündigen Temperung des Kristalls bei 360°C in Sauerstoff liefert eine Wieder-

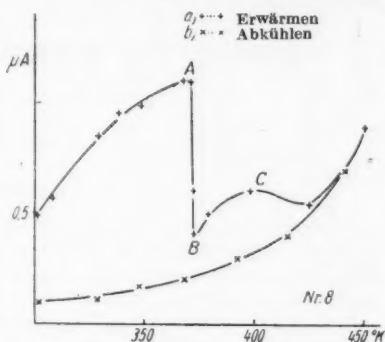


Abb. 4. Haftstellen-Stromkurve bei Unterbrechung der gleichmäßigen Erwärmung

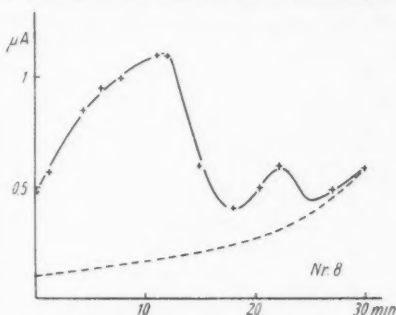


Abb. 5. Dieselbe Messung wie in Abb. 4, als Funktion der Zeit aufgetragen

¹³⁾ G. Busch, ZAMP I, 3 u. 81 (1950).

holung der Messung (unter gleichen Bedingungen) die Kurven 2, 2', Abb. 6. Man sieht, daß die von den Kurven 2, 2' eingeschlossene Fläche etwa doppelt so groß ist, als die Fläche zwischen den Kurven 1, 1'.

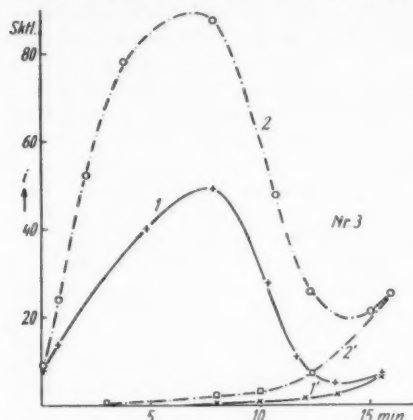


Abb. 6. Haftstellen-Stromkurven als Funktion der Zeit, vor (Kurven 1, 1') und nach (Kurven 2, 2') einer 20stündigen Temperung in Sauerstoff

in Abb. 6, im Rahmen unserer Deutung zwanglos durch eine Erhöhung der Haftstellenkonzentration. Wir können also annehmen, daß zumindest eine Ursache der Haftstellenbildung in CdS-Einkristallen der zusätzliche Einbau von Sauerstoff ist (vermutlich auf Zwischengitterplatz¹⁴⁾).

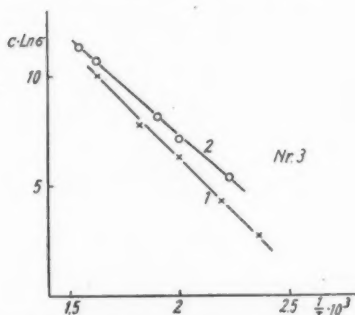


Abb. 7. Dunkelstrom als Funktion von $1/T$, vor (Kurve 1) und nach (Kurve 2) einer 20stündigen Temperung in Sauerstoff

In Abb. 7 ist der Dunkelstromverlauf des Kristalls Nr. 3 bei höheren Temperaturen gegen die reziproke absolute Temperatur vor (Kurve 1) und nach (Kurve 2) dieser Temperung aufgetragen. Die Dunkelleitfähigkeit hat also durch das Tempern in Sauerstoff zugenommen, dies bedeutet allgemein eine Vergrößerung der Störstellenkonzentration¹⁴⁾.

Wir können nun keineswegs sagen, daß die in beschriebener Weise aus den Abb. 3 und 6 erhaltenen Ladungen, dividiert durch das Kristallvolumen, identisch mit den Haftstellenkonzentrationen sind. Trotzdem erklärt sich aber eine Vergrößerung der Ladung bei gleichen Anfangsbedingungen, wie

Die geschilderten Messungen wurden an etwa 10 Exemplaren unterschiedlicher Dunkel- und Photoleitfähigkeit mit der in einer früheren Arbeit¹⁵⁾ beschriebenen Meßanordnung durchgeführt. Die Kristalle zeigten trotz größerer Unterschiede in Einzelheiten hierbei im prinzipiellen Kurvenverlauf dasselbe Verhalten.

Herrn Prof. Dr. F. Möglich sowie Herrn Dr. J. Faßbender danke ich für viele Anregungen und fördernde Diskussionen.

¹⁴⁾ G. Busch, l. c.

¹⁵⁾ W. Muscheid, l. c.

Berlin-Buch, Institut für Festkörperforschung der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

(Bei der Redaktion eingegangen am 15. April 1953.)

Beitrag zur Leitfähigkeitstheorie der Halbleiter

Von Wolfgang-Hermann Isay

(Mit 5 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Es wird untersucht, wie man auf Grund von vorgegebenen An- und Abklingmeßkurven die in den Differentialgleichungen des Bändermodells enthaltenen Parameter berechnen kann. Dabei zeigt es sich, daß strenge Lösungen für diese Aufgabe nur sehr beschränkt brauchbar sind. Es wird eine Näherungsmethode entwickelt, die der gestellten Aufgabe weitgehend gerecht wird.

1. Einleitung

In der Theorie des festen Körpers bei den Leitfähigkeitsuntersuchungen der Halbleiter spielt das sogenannte Bändermodell für die energetische Lage der Elektronen eine wichtige Rolle.

Beim idealen Halbleiterkristall sind für den Leitungsvorgang zwei Energiebänder von Bedeutung: Das oberste im unerregten Zustand mit Elektronen voll besetzte sogenannte Grundband und das darüber liegende im unerregten Zustand unbesetzte sogenannte freie Band.

Durch Einstrahlung von Energie werden Elektronen aus dem Grundband in das freie Band gebracht, und da sie sich dort frei bewegen können (es sind ja nicht alle energetisch möglichen Terme besetzt), entsteht beim Anlegen eines äußeren elektrischen Feldes ein Strom. Nimmt man an, daß dabei der Kristall als Ganzes neutral bleibt, daß also auf der einen Seite ebenso viele Elektronen in den Kristall eintreten wie ihn auf der anderen Seite verlassen (Nachlieferung von Elektronen aus der Kathode), so ist die elektrische Stromdichte j proportional zur Anzahl n der Elektronen im freien Band. Es gilt

$$j = e b n \mathcal{E};$$

dabei ist b die Beweglichkeit der Elektronen im freien Band. An sich könnten auch die Löcher im Grundband zur Leitfähigkeit beitragen, jedoch hat man im allgemeinen angenommen, daß ihre Beweglichkeit so klein ist, daß ihr Anteil an der Leitfähigkeit vernachlässigt werden kann. Auch hier soll von dieser Tatsache ausgegangen werden.

Beim realen Halbleiterkristall sind durch Fremdmetalle, Fehlstellen usw. zwischen den beiden eben erwähnten Hauptenergiebändern noch weitere Energieteile vorhanden. Nach dem Bändermodell werden meist noch zwei Energietermgruppen angenommen. Einmal die Haftstellen oder Störstellen dicht unterhalb des freien Bandes, die im unerregten Zustand unbesetzt sind. Zum anderen die Aktivatoren, die direkt oberhalb des Grundbandes angeordnet sind. Sie ent-

stehen durch den Einbau von Fremdmittel oder überschüssigem Metall des Kristalls selbst und sind im Grundzustand voll besetzt.

Im allgemeinen wird vorausgesetzt, daß die Elektronen innerhalb der Haftstellen und Aktivatoren nicht frei beweglich sind. Obgleich demnach die dort befindlichen Elektronen nicht direkt zur Leitfähigkeit beitragen, sind sie doch von großer Bedeutung für diese, da zwischen allen vier Energietermgruppen oder, wie wir kurz (wenn auch etwas inkorrekt) sagen wollen, zwischen allen vier Bändern ein dauernder Übergang und Austausch von Elektronen stattfindet. Zur Wiedergabe des Übergangsmechanismus zwischen den Bändern und zur Berechnung der Elektronenkonzentrationen der einzelnen Bänder in Abhängigkeit von der Zeit ist schon vor Jahren von Riehl und Schön, Möglich und Rompe ein Differentialgleichungssystem angegeben worden¹⁾. In einer großen Zahl darauf folgender Arbeiten²⁾ ist dieses System immer wieder aufgeschrieben aber nur in Sonderfällen unter speziellen Voraussetzungen gelöst worden. Wege zur Auflösung eines derartigen Differentialgleichungssystems zu finden, ist der Gegenstand dieser Arbeit, und zwar ist unser Problem folgendermaßen formuliert:

Vorgegeben ist die Anklingkurve und die Abklingkurve der Leitfähigkeit eines CdS-Kristalls, die natürlich bei gleicher Einstrahlungsintensität, Temperatur usw. gemessen sein müssen. Außerdem wird ein bestimmtes Bändermodell mit dem zugehörigen Differentialgleichungssystem zugrunde gelegt. Lassen sich dann die einzelnen Übergangsparameter und weitere Konstanten wie etwa Haftstellenkonzentration und stationäre Elektronenkonzentrationen für diesen Kristall berechnen?

Es wird sich zeigen, daß dieses Problem weitgehend gelöst werden kann, wenn man sich auf ein Bändermodell mit drei Energiebändern, d. h. also mit einer Störtermgruppe beschränkt.

Im wesentlichen das gleiche Problem ist bereits in einer Arbeit von Faßbender und Seraphin behandelt worden³⁾. Dort wurde ein Modell nur aus Grundband und freiem Band bestehend verwendet, das streng durch die Differentialgleichung

$$\frac{dn}{dt} = Z - \gamma n^2$$

wiedergegeben wird. Die beiden Autoren haben (ohne sich in ihrer Arbeit direkt auf das Bändermodell zu beziehen) der Differentialgleichung noch ein zusätzliches Glied ($-\alpha n$) hinzugefügt. Mit diesem Modell läßt sich das obige Problem nur dann lösen (beziehungsweise werden die Meßkurven nur dann richtig wiedergegeben), wenn der Anklingvorgang und der Abklingvorgang etwa gleich schnell verlaufen. Diese Tatsache ist von Höhler dargelegt worden⁴⁾.

Die Mehrzahl der im Institut vorliegenden von Seraphin gemachten Messungen zeigt jedoch Kristalle, bei denen der Abklingvorgang wesentlich langsamer

¹⁾ N. Riehl u. M. Schön, Z. Physik **114**, 682 (1939); F. Möglich u. R. Rompe, Physik. Z. **1940**, 238.

²⁾ Vgl. unter anderen: M. Schön, Ann. Physik **3**, 333 (1948); I. Broser u. R. Warminsky, Ann. Physik **7**, 289 (1950); ferner E. I. Adiwitsch, Einige Probleme der Theorie der Kristalllumineszenz, Akademie-Verlag, Berlin 1953.

³⁾ J. Faßbender u. B. Seraphin, Ann. Physik **10**, 374 (1952).

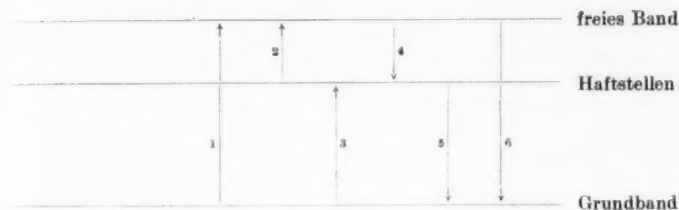
⁴⁾ G. Höhler, Ann. Physik (6) **12**, 379 (1953).

verläuft als der Anklingvorgang; gerade für solche Kristalle soll hier eine Theorie entwickelt werden. Es sei betont, daß gerade das Verhältnis von Abkling- zu Anklingzeit ein wichtiges Charakteristikum für einen Kristall darstellt.

2. Das verwendete Bändermodell

Wie schon gesagt, wollen wir ein Modell mit drei Energiebändern verwenden. Wir haben also im Gegensatz zu dem in der Einleitung erwähnten Modell nur ein Störband. Man könnte daran denken, dieses Störband in die Mitte zwischen die beiden Hauptenergiebänder zu verlegen und es als ein etwas undefinierbares Gemisch von Haftstellen und Aktivatoren betrachten. Es zeigt sich jedoch, daß das ganz unzweckmäßig wäre. Vielmehr werden wir unser Modell sofort in zwei Fälle aufspalten; einmal soll das Störband die Haftstellen darstellen, im anderen Falle soll es die Aktivatoren wiedergeben. Je nachdem, ob man sich für den Einfluß der Haftstellen oder den der Aktivatoren interessiert, wird man das eine oder das andere Modell verwenden.

Bei dem Modell mit den Haftstellen haben wir das nachstehende Schema:



Es ist

n^- = Konzentration der Elektronen im freien Band pro cm^3

h^- = Konzentration der Elektronen in den Haftstellen pro cm^3

n^+ = Konzentration der Löcher im Grundband pro cm^3 .

Die Gesamtkonzentration der Haftstellen sei H (pro cm^3). Es ist gegeben:

Übergang 1 durch: Z ;

Übergang 4 durch: $\alpha n^- (H - h^-)$

Übergang 2 durch: δh^- ;

Übergang 5 durch: $\beta n^+ h^-$

Übergang 3 durch: $\varepsilon (H - h^-)$;

Übergang 6 durch: $\gamma n^- n^+$.

Das Differentialgleichungssystem für die Konzentrationen lautet also:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn^-}{dt} &= Z - \alpha n^- (H - h^-) + \delta h^- - \gamma n^- n^+ \\ \frac{dh^-}{dt} &= \alpha n^- (H - h^-) - \beta n^+ h^- - \delta h^- + \varepsilon (H - h^-) \\ \frac{dn^+}{dt} &= Z - \beta n^+ h^- + \varepsilon (H - h^-) - \gamma n^- n^+ \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dazu kommt noch die Neutralitätsbedingung

$$n^- + h^- = n^+. \quad (1')$$

Bei dem Modell mit den Aktivatoren haben wir das folgende Schema:



Es ist

n^- = Konzentration der Elektronen im freien Band pro cm^3

a^+ = Konzentration der Löcher in den Aktivatoren pro cm^3

n^+ = Konzentration der Löcher im Grundband pro cm^3 .

Die Gesamtkonzentration der Aktivatoren sei A (pro cm^3). Es ist gegeben:

Übergang 1 durch: Z ;

Übergang 4 durch: $\alpha n^- a^+$

Übergang 2 durch: $\delta (A - a^+)$;

Übergang 5 durch: $\beta n^+ (A - a^+)$

Übergang 3 durch: εa^+ ;

Übergang 6 durch: $\gamma n^- n^+$.

Das Differentialgleichungssystem für die Konzentrationen lautet also:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn^-}{dt} &= Z - \alpha n^- a^+ + \delta (A - a^+) - \gamma n^- n^+ \\ \frac{da^+}{dt} &= \beta n^+ (A - a^+) - \alpha n^- a^+ - \varepsilon a^+ + \delta (A - a^+) \\ \frac{dn^+}{dt} &= Z - \beta n^+ (A - a^+) + \varepsilon a^+ - \gamma n^- n^+ \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Dazu kommt noch die Neutralitätsbedingung

$$n^- = n^+ + a^+. \quad (2')$$

3. Strenge Lösungen

Um das in der Einleitung gestellte Problem zu lösen, wird man natürlich zunächst daran denken, strenge Lösungen der Systeme (1), (1') beziehungsweise (2), (2') zu suchen; denn der Weg eines numerischen Iterationsverfahrens oder eine sonstige numerische Methode scheiden von vorn herein aus, da über die zahlreichen Konstanten in der Systemen ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, A, H, Z$) nichts bekannt ist, diese ja im Gegenteil gerade berechnet werden sollen.

Es hat sich jedoch gezeigt, daß für die Systeme (1) und (2) keine strengen Lösungen angegeben werden können. Jedoch gibt es strenge Lösungen, wenn man über einige Konstanten spezielle, einschränkende Voraussetzungen macht. Wir wollen hier ausdrücklich betonen: Diese einschränkenden Voraussetzungen sind ausschließlich durch mathematische Erwägungen bestimmt. Sie sind auch der Grund dafür, daß (wie sich gezeigt hat) den auf diese Weise gefundenen strengen Lösungen nur ein geringer Wert bei der Bewältigung des in der Einleitung gestellten Problems zukommt.

Trotzdem sollen diese Lösungen hier kurz mitgeteilt werden. Wir wollen uns aber auf die Lösung des Systems (1) beschränken, da man formal leicht aus (1) das System (2) erhalten kann, wenn man

n^- durch n^+ , n^+ durch n^- , h^- durch a^+ , H durch A , α durch β , β durch α , δ durch ε , ε durch δ ersetzt.

Das gleiche gilt natürlich auch für die Lösungen.

Es gibt drei verschiedene Lösungen:

a) Wir setzen in (1): $H - h^- \approx H$ und außerdem $\gamma = \beta$.

Das könnte man physikalisch dann tun, wenn nur wenige Elektronen in den Haftstellen vorhanden wären. Das System (1) geht dann über in

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn^-}{dt} &= Z - \alpha n^- H + \delta h^- - \beta n^- n^+ \\ \frac{dh^-}{dt} &= \alpha n^- H - \beta n^+ h^- - \delta h^- + \varepsilon H; \quad n^- + h^- = n^+ \\ \frac{dn^+}{dt} &= Z - \beta n^+ h^- + \varepsilon H - \beta n^- n^+ \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß das System (3) streng auflösbar ist, und die Lösung bei Zugrundelegung der wichtigsten Anfangsbedingung für den Abklingvorgang

$$n^-(0) = 0; \quad n^+(0) = 0$$

die Form hat:

$$\left. \begin{aligned} n^+(t) &= \frac{\varrho}{\beta} \Im \varrho t. \\ n^-(t) &= \frac{1}{e^{\varrho t} + e^{-\varrho t}} \\ &\cdot \left\{ \frac{Z + \varrho \frac{\delta}{\beta}}{\alpha H + \delta + \varrho} e^{\varrho t} + \frac{Z - \varrho \frac{\delta}{\beta}}{\alpha H + \delta - \varrho} e^{-\varrho t} - \left(\frac{Z + \varrho \frac{\delta}{\beta}}{\alpha H + \delta + \varrho} + \frac{Z - \varrho \frac{\delta}{\beta}}{\alpha H + \delta - \varrho} \right) e^{-(\alpha H + \delta)t} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die Lösung für den Abklingvorgang ($Z = 0$, $\varepsilon = 0$) lautet mit der Anfangsbedingung

$$\left. \begin{aligned} n^-(0) &= n_0^-, \quad n^+(0) = n_0^+; \\ n^+(t) &= \frac{n_0^+}{n_0^+ \beta t + 1} \\ n^-(t) &= \frac{1}{n_0^+ \beta t + 1} \left\{ \frac{\delta n_0^+}{\alpha H + \delta} (1 - e^{-(\alpha H + \delta)t}) + n_0^- e^{-(\alpha H + \delta)t} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Dabei sind n_0^- und n_0^+ die stationären Elektronenkonzentrationen. Nach (4) ist

$$n_0^- = \frac{Z + \varrho \frac{\delta}{\beta}}{\alpha H + \delta + \varrho}; \quad n_0^+ = \frac{\varrho}{\beta}.$$

$h^-(t)$ ist natürlich stets gegeben durch: $h^-(t) = n^+(t) - n^-(t)$.

b) Wir setzen in (1) $\gamma = \beta$ und charakterisieren außerdem den Übergang 3 lediglich durch die Konstante ε_0 . Dieser Fall ist somit etwas weitreichender als a).

Das System (1) geht dann über in

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn^-}{dt} &= Z - \alpha n^- (H - h^-) + \delta h^- - \beta n^- n^+ \\ \frac{dh^-}{dt} &= \alpha n^- (H - h^-) - \beta n^+ h^- - \delta h^- + \varepsilon_0 \quad n^- + h^- = n^+ \\ \frac{dn^+}{dt} &= Z - \beta n^+ h^- + \varepsilon_0 - \beta n^- n^+ \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Man erkennt unmittelbar, daß sich für $n^+(t)$ genau dieselbe Lösung ergibt wie im Falle a) in Gl. (4) und (5). Dagegen wird der Ausdruck für $n^-(t)$ jetzt komplizierter. Für eine neue abhängige Veränderliche $N(t)$, die mit $n^-(t)$ durch die Relation

$$n^-(t) = \frac{1}{\alpha} \frac{d}{dt} \ln N(t)$$

verbunden ist, ergibt sich nach der weiteren Transformation

$$\xi = -e^{-2\varrho t}, \quad N = \xi^{p+q} \eta(\xi) \quad (\varrho = \sqrt{\beta(Z + \varepsilon_0)})$$

die hypergeometrische Differentialgleichung:

$$\xi(\xi-1)\eta'' + [(2q+2p+2s+1)\xi - (1+2q)]\eta' + [(p+q+s)^2 - Q^2]\eta = 0.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha H + \delta}{\varrho} \right); & s &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha H + \delta}{\varrho} \right) \\ q^2 &= p^2 + \frac{\alpha}{4\varrho^2} \left(Z + \frac{\delta}{\beta} \varrho \right); & Q^2 &= s^2 + \frac{\alpha}{4\varrho^2} \left(Z - \frac{\delta}{\beta} \varrho \right). \end{aligned}$$

Im vorliegenden Fall sind die im Intervall $-1 \leq \xi \leq 0$ konvergierenden hypergeometrischen Reihen die gesuchten Lösungen. Es sind das die nach Potenzen von $\left(\frac{\xi}{\xi-1}\right)$ fortschreitenden Reihen. Schließlich ist dann

$$n^-(t) = \frac{1}{\alpha} \frac{c \dot{N}_1(t) + \dot{N}_2(t)}{c N_1(t) + N_2(t)}.$$

Die Konstante c ist aus der Anfangsbedingung zu bestimmen.

c) Wir setzen in (1) $\gamma = 0$, $H - h^- \approx H$ und geben den Übergang 2 durch die Konstante δ_0 wieder.

Das jetzt entstehende System

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn^-}{dt} &= Z - \alpha n^- H + \delta_0 \\ \frac{dh^-}{dt} &= \alpha n^- H - \beta n^+ h^- - \delta_0 + \varepsilon H \\ \frac{dn^+}{dt} &= Z - \beta n^+ h^- + \varepsilon H \end{aligned} \right\} \quad n^- + h^- = n^+ \quad (7)$$

führt für $n^-(t)$ zu einem einfachen Exponentialgesetz und für $n^+(t)$ zu einem linear gebrochenen Ausdruck von konfluenten hypergeometrischen Funktionen.

Um nun mit Hilfe einer der eben zusammengestellten strengen Lösungen das in der Einleitung gestellte Problem zu lösen, muß man die in den Funktionen $n^-(t)$ enthaltenen Konstanten (α, β, \dots) so bestimmen, daß die Lösungsfunktion $n^-(t)$ wenigstens annähernd die experimentell vorgegebene An- und Abklingkurve wiedergibt.

Dazu ist es am zweckmäßigsten, die theoretische Lösungskurve mit der experimentellen Kurve an einigen besonders markanten Zeitpunkten zur Übereinstimmung zu bringen. Dadurch erhält man Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten. Solche markanten Zeitpunkte sind vor allem: Die Anklingzeit und die Abklingzeit der Leitfähigkeit, d. h. die Zeit, in der die Leitfähigkeit etwa zu 90% angeklungen beziehungsweise auf etwa 10% abgeklungen ist.

Die Halbwertzeiten, d. h. die Zeiten, in denen die Leitfähigkeit auf 50% ihres Sättigungswertes an- beziehungsweise abgeklungen ist.

Schließlich ist die Anfangssteigung der Anklingkurve ein gutes Charakteristikum.

Hier erkennt man, daß die unter b) und c) angegebenen Lösungen praktisch unbrauchbar sind; denn die zu bestimmenden Konstanten stehen zum Teil in den Argumenten der hypergeometrischen beziehungsweise konfluenten hypergeometrischen Funktionen. Wir besitzen aber keine auch nur annähernd ausreichenden Tabellenwerke für diese Funktionen. Abgesehen davon wäre die Auflösung solcher Gleichungen ungeheuer mühsam, und wegen der ohne Rücksicht auf physikalische Erwägungen getroffenen Verfügungen über einige Konstanten (vgl. S. 330) wäre es auch sehr zweifelhaft, ob sich überhaupt die gemessenen Kurven damit wiedergeben ließen.

Es bleibt also noch die unter a) angegebene Lösung (4), (5), die wegen ihrer einfachen Bauart numerischen Berechnungen besonders zugänglich erscheint. Der Verfasser hat auch in der eben geschilderten Weise versucht, mit ihr die eingangs gestellte Aufgabe zu lösen. Es hat sich aber gezeigt, daß gerade diejenigen Fälle, auf die es besonders ankam (Abklingvorgang wesentlich langsamer als Anklingvorgang), mit dieser Lösung nicht erfaßt werden können. Sie charakterisiert nur solche Kristalle, bei denen der Abklingvorgang nicht viel langsamer verläuft als der Anklingvorgang.

Die Lösung (4), (5) hat auch noch einen anderen Nachteil:

Infolge ihrer Homogenität in den Konstanten ist es lediglich möglich, drei Aggregate der insgesamt sechs Konstanten $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon, H, Z$ zu bestimmen, und zwar

$$\alpha H + \delta, \quad \frac{Z\beta}{\delta}, \quad \sqrt{\beta(Z + \varepsilon H)}.$$

Dadurch wird mit (4) und (5) das in der Einleitung gestellte Problem auch bei Kristallen, deren An- und Abklingkurve die Lösung (4), (5) an sich wiedergibt, nur in einem bescheidenen Umfang gelöst. Es wird sicher schwer sein, noch drei weitere Bestimmungsgleichungen für die Konstanten durch andere Messungen und Überlegungen zu erhalten.

Der Grund für das unbefriedigende Ergebnis mit den strengen Lösungen liegt in der einseitig mathematisch bedingten Verfügung über gewisse Konstanten, durch die das System (1) weitgehend linearisiert wird. Jedoch ist gerade der

nicht-lineare Charakter des Systems wesentlich⁵⁾. Man muß also eine Lösungsmethode anwenden, die die Systeme (1) und (2) in ihrer vollen nicht-linearen Gestalt angreift. Dabei liegt es auf der Hand, daß man dann keine strengen Lösungen mehr erwarten kann.

4. Die angewendete Lösungsmethode

Wenn wir uns die Problemstellung aus der Einleitung vor Augen halten, nach der es in erster Linie auf die Ermittlung der Konstanten aus einer vorgegebenen Meßkurve ankommt, liegt es nahe, den folgenden Weg zu beschreiten. Wir schildern ihn am Beispiel des Systems (1). Für das System (2) ist er ganz analog.

Zunächst eliminieren wir durch die Relation $h^- = n^+ - n^-$ die eine überzählige Differentialgleichung des Systems (1) und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{dn^-}{dt} &= Z - \alpha n^{-2} + \alpha n^- n^+ - \alpha H n^- + \delta n^+ - \delta n^- - \gamma n^- n^+ \\ \frac{dn^+}{dt} &= Z - \beta n^{+2} + \beta n^+ n^- + \varepsilon H - \varepsilon n^+ + \varepsilon n^- - \gamma n^- n^+.\end{aligned}\quad (8)$$

Das System (8) ist dem System (1), (1') absolut gleichwertig. Vorgegeben ist jetzt die Meßkurve $n^-(t)$ des Anklingvorganges beziehungsweise des Abklingvorganges der Leitfähigkeit. Wir setzen voraus, daß diese Kurve eine Lösung des Dgl.-Systems (8) sei und gehen dann folgendermaßen vor: Wir approximieren die Meßkurve möglichst genau durch eine analytische Funktion (Potenzen, Exponentialfunktion usw.):

$$n^-(t) = f(t). \quad (9)$$

Natürlich genügt $f(t)$ nicht streng dem Dgl.-System (8). Trotzdem setzen wir $n^-(t) = f(t)$ in die erste Gleichung von (8) ein und berechnen daraus

$$n^+(t) = \frac{f'(t) + \alpha f^2(t) + (\alpha H + \delta) f(t) - Z}{(\alpha - \gamma) f(t) + \delta}. \quad (10)$$

Nun setzen wir (9) und (10) in die zweite Gleichung von (8) ein und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{f' + \alpha f^2 + (\alpha H + \delta) f - Z}{(\alpha - \gamma) f + \delta} &= Z - \beta \left(\frac{f' + \alpha f^2 + (\alpha H + \delta) f - Z}{(\alpha - \gamma) f + \delta} \right)^2 \\ &+ ((\beta - \gamma) f - \varepsilon) \frac{f' + \alpha f^2 + (\alpha H + \delta) f - Z}{(\alpha - \gamma) f + \delta} + \varepsilon f + \varepsilon H.\end{aligned}\quad (11)$$

⁵⁾ Ein vollständig lineares System etwa

$$\left. \begin{aligned}\frac{dn^-}{dt} &= Z - (\alpha + \gamma) n^- + \delta h^- \\ \frac{dh^-}{dt} &= \alpha n^- - (\beta + \delta) h^- + \varepsilon \quad n^+ = n^- + h^- \\ \frac{dn^+}{dt} &= Z - \beta h^- - \gamma n^- + \varepsilon\end{aligned} \right\}$$

hat nämlich beim Anklingvorgang die Lösung $n^-/n_0^- = F(t)$ und beim Abklingvorgang $n^-/n_0^- = 1 - F(t)$; also beide Vorgänge verlaufen genau gleich schnell!

Die Relation (11) wird natürlich nicht identisch in t erfüllt sein; oder wenigstens nicht sowohl für den Ankling- als auch für den Abklingvorgang. Wäre das der Fall, so stellten (9) und (10) strenge Lösungen des Systems (8) dar.

Bestimmen wir jedoch die uns zur Verfügung stehenden Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, H, Z$ so, daß die Relation (11) möglichst genau erfüllt ist, so haben wir in (9) und (10) eine gute Näherungslösung des Systems (8) und zugleich die gesuchten Konstanten entsprechend der vorgelegten Meßkurve bestimmt.

Damit wäre dann die in der Einleitung gestellte Aufgabe gelöst. Die praktische Durchführung dieser Methode bereitet jedoch einige Schwierigkeiten, denn es erhebt sich die Frage, wie man die Relation (11) möglichst genau erfüllen will.

Eine Möglichkeit wäre, daß man die Gl. (11) für einige besonders markante Zeitpunkte des An- und Abklingvorganges genau erfüllt (etwa Halbwertzeiten usw.). Aus den sich so ergebenden Gleichungen könnte man die Konstanten berechnen. Der Nachteil dieses Weges ist jedoch, daß man nicht genau weiß, wie sich das Ergebnis einer solchen Rechnung ändert, wenn statt der gewählten Zeitpunkte andere Zeitpunkte zugrunde gelegt werden. Diese Unsicherheit wird vermieden, wenn man die linke und rechte Seite der Gl. (11) nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate oder einem ähnlichen Verfahren zur Übereinstimmung bringt. Der Rechenaufwand eines solchen Verfahrens ist jedoch so ungeheuer groß, daß auch dieser Weg praktisch nicht gangbar ist.

Es gibt jedoch noch eine andere Möglichkeit, die erwähnte Unsicherheit zu vermeiden, indem man für $f(t)$ eine so einfach gebaute Funktion ansetzt, daß die Gl. (11) auf dem strengen Wege des Koeffizientenvergleiches in t erfüllt werden kann. Bei komplizierten Funktionen $f(t)$ ist das nicht möglich, da dort ein Koeffizientenvergleich weit mehr Bestimmungsgleichungen liefern würde als uns Konstante zur Verfügung stehen. Allerdings müssen wir jetzt in Kauf nehmen, daß infolge ihrer einfachen Bauart die Funktion $f(t)$ die experimentelle Kurve nicht ganz genau wiedergeben wird. Wir glauben aber, daß dieser Umstand zunächst nicht so schwerwiegend sein wird (vgl. auch die Beispiele in Punkt 6).

5. Das Modell Nr. I.

Es hat sich gezeigt, daß eine große Anzahl von Ankling- und Abklingkurven gut wiedergegeben werden durch

$$\begin{aligned} f_1(t) &= n_0^- (1 - e^{-xt}) \\ f_2(t) &= \frac{n_0^-}{wt + 1} \end{aligned} \quad (12)$$

Das Modell I soll zur Untersuchung des Einflusses der Haftstellen auf die Leitfähigkeit dienen. Wir haben also das System (1) bzw. (8) zugrunde zu legen.

w und x sind frei wählbare Parameter, mit Hilfe derer wir die Funktionen f_1 und f_2 den vorgelegten Meßkurven anpassen.

Für den Abklingvorgang sind ε und Z gleich Null zu setzen. Aus Gl. (10) folgt für die stationäre Löcherkonzentration, je nachdem man sie als Endzustand des Anklingvorganges oder als Anfangszustand des Abklingvorganges betrachtet:

$$n_0^+ = \frac{\alpha n_0^2 + (\alpha H + \delta) n_0^- - Z}{(\alpha - \gamma) n_0^- + \delta} = \frac{f_2'(0) + \alpha n_0^2 + (\alpha H + \delta) n_0^-}{(\alpha - \gamma) n_0^- + \delta} \quad (13)$$

Aus der Bedingung $n^+(0) = 0$ folgt außerdem $f'_1(0) = Z$. Es ist also nach (13)

$$f'_1(0) = Z = -f'_2(0). \quad (14)$$

Diese Gleichung besagt, daß die Anfangssteigung der Anklingkurve bei Vorgängen, die durch das System (8) beschrieben werden, entgegengesetzt gleich ist der Anfangssteigung der Abklingkurve. Die uns vorliegenden Meßkurven zeigen auch ungefähr ein solches Verhalten, wenn auch die Ermittlung der Anfangssteigung der Abklingkurve aus einer Meßkurve nur bis zu einem gewissen Grade genau möglich ist. Deshalb werden wir für diese Ermittlung stets die Anklingmeßkurve verwenden. Setzen wir

$$Z = z n_0, \quad (15)$$

so ist z die Anfangssteigung der relativen Konzentration und leicht aus der experimentellen Kurve zu entnehmen.

Man wird jetzt bemerken, daß der Ansatz (12) unseres Modells die Bedingung (14) verletzt; das kommt natürlich daher, daß wir in (12) so einfach gebaute Funktionen gewählt haben. Mit einem komplizierteren Ansatz hätten wir ohne weiteres die Relation (14) erfüllen können. Von den Funktionen (12) verlangen wir lediglich, daß sie den überwiegenden Teil des Verlaufs von An- und Abklingkurve richtig wiedergeben und nehmen dabei zugunsten der Einfachheit ruhig in Kauf, daß (12) für die Anfangssteigung nicht mehr stimmt. Letztere wird von uns durch die Relation (15) berücksichtigt⁶⁾.

Nur wenn wir $x = w = z$ setzen, genügt (12) auch der Bedingung (14). In diesem Fall wäre (12) eine strenge Lösung des Systems (8). Das ist natürlich nicht zu erwarten, und es zeigt sich auch, daß gerade in diesem Fall der Koeffizientenvergleich zur Erfüllung der Gl. (11) nicht zu einem physikalisch brauchbaren Ergebnis führt. Das Modell I erfaßt also gerade solche Kristalle nicht, bei denen An- und Abklingvorgang etwa gleich schnell verlaufen. Da für diese aber bereits eine befriedigende Theorie existiert, soll uns das hier nicht stören⁷⁾.

Wir kommen nun zur Durchführung des Koeffizientenvergleiches zur Erfüllung der Relation (11).

Zunächst betrachten wir den Abklingvorgang; bei ihm ist $\varepsilon = 0, Z = 0$. Indem wir $f = f_2$ in Gl. (11) eintragen und nach Potenzen von t ordnen (die elementaren und etwas umfangreichen Rechnungen unterdrücken wir hier), ergibt sich beim Vergleich für die höchste auftretende Potenz t^2 :

$$\alpha \beta H = \frac{w}{n_0} \delta - \gamma \delta. \quad (16)$$

Der Koeffizientenvergleich für t^1) liefert:

$$w(\alpha + \beta - \gamma)(\beta - \gamma) = n_0^-(\alpha + \beta - \gamma)(\beta - \gamma)\gamma.$$

Nähere Untersuchungen zeigten, daß man unter Berücksichtigung der anderen Relationen zu wählen hat:

$$\gamma = \alpha + \beta. \quad (17)$$

⁶⁾ Wie man auch aus den folgenden Beispielen erkennt, ist diese kleine Unstimmigkeit bereits nach einer kurzen für den Gesamtverlauf unerheblichen Zeit vollkommen ausgeglichen.

⁷⁾ Vgl. die genannte Arbeit von Faßbender-Seraphin.

Der Koeffizientenvergleich für t^0) ist dann unter Berücksichtigung von (16) und (17) identisch erfüllt.

Wir kommen nun zum Anklingvorgang. Indem wir $f = f_1$ aus (12) in Gl. (11) einsetzen und nach Potenzen von e^{-xt} ordnen (die Rechnung unterdrücken wir), ergibt sich beim Koeffizientenvergleich für e^{-3xt}):

$$\alpha H = \frac{\alpha + \beta}{\alpha \beta} (\beta \varepsilon - \alpha \delta). \quad (18)$$

Beim Koeffizientenvergleich für e^{-2xt} erhalten wir:

$$\begin{aligned} & -2\beta x^2 - \beta (\alpha H + \delta)^2 + 2\beta (\alpha H + \delta) x - 3(\alpha H + \delta) \alpha \beta n_0^- - (\alpha H + \delta) \alpha \delta \\ & + (\alpha H + \delta) \beta \varepsilon + \alpha \beta Z + 3\alpha \delta x - 3\alpha^2 \delta n_0^- - \beta \varepsilon x - \alpha \delta \varepsilon + 3\alpha \beta \varepsilon n_0^- \\ & - 2\beta \delta \varepsilon + \beta^2 \varepsilon H + 3\beta^2 \varepsilon n_0^- + \beta^2 Z + \beta x^2 = 0. \end{aligned}$$

Wenn man diese Relation mit Hilfe von (16), (18), (15) umformt, ergibt sich schließlich

$$\delta = \varepsilon \varphi \frac{x^2 - (1 + 2\varphi) \varepsilon x}{\varepsilon x + w z - (1 + \varphi)^2 \varepsilon^2}. \quad (19)$$

Dabei ist $\varphi = \frac{\beta}{\alpha}$. Aus (16), (17), (18) ergibt sich noch

$$\frac{1}{n_0^-} = \frac{\beta \varepsilon}{\alpha \delta} (\alpha + \beta) \frac{1}{w}. \quad (20)$$

Der Koeffizientenvergleich für e^{-xt} liefert:

$$\begin{aligned} & (x - 2\alpha n_0^- - \alpha H - \delta) (\delta x - \beta n_0^- x - 2\alpha \beta n_0^{-2} - 2\alpha \beta H n_0^- - 2\beta \delta n_0^- + 2\beta Z \\ & + \alpha \beta n_0^{-2} - \alpha \delta n_0^- + \beta \varepsilon n_0^- - \delta \varepsilon) + (\alpha n_0^{-2} + \alpha H n_0^- + \delta n_0^- - Z) (\beta x - 2\alpha \beta n_0^- \\ & + \alpha \delta - \beta \varepsilon) - (\delta^2 - 2\beta \delta n_0^- + \beta^2 n_0^{-2}) \varepsilon + (2\beta \delta - 2\beta^2 n_0^-) (\varepsilon n_0^- + \varepsilon H + Z) = 0. \end{aligned}$$

Wir formen diese Relation mit Hilfe von (15), (16), (18), (19), (20) um und erhalten nach längerer Rechnung:

$$\left. \begin{aligned} & \varepsilon^3 (1 + \varphi)^4 (1 + 2\varphi) - \varepsilon^4 (1 + \varphi)^2 (4 + 5\varphi) x \\ & + \varepsilon^3 (1 + \varphi)^2 [(5 + 3\varphi) x^2 + (1 + 2\varphi) w x - 2(1 + 2\varphi) w z] \\ & - \varepsilon^2 (1 + \varphi) [2x^3 + 3(1 + \varphi) x^2 w - (7 + 8\varphi) w x z] \\ & - \varepsilon [-2x^3 + (5 + 3\varphi) x^2 z + (1 + 2\varphi) w x z - (1 + 2\varphi) w z^2] w \\ & + 3w^2 x z (x - z) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Schließlich erhalten wir noch durch den Koeffizientenvergleich für e^{-0xt} :

$$\begin{aligned} & -\beta (\alpha n_0^{-2} + \alpha H n_0^- + \delta n_0^- - Z)^2 + (\alpha n_0^{-2} + \alpha H n_0^- + \delta n_0^- - Z) (\alpha \beta n_0^{-2} - \alpha \delta n_0^- \\ & + \beta \varepsilon n_0^- - \delta \varepsilon) + (\delta^2 - 2\beta \delta n_0^- + \beta^2 n_0^{-2}) (\varepsilon n_0^- + \varepsilon H + Z) = 0. \end{aligned}$$

Formt man diese Gleichung mit Hilfe von (15), (16), (18), (19), (20) um, so ergibt sich nach längerer Rechnung

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^6 (1 + \varphi)^5 \varphi - \varepsilon^5 (1 + \varphi)^4 [(1 + 2\varphi)w + 2\varphi x] \\ + \varepsilon^4 (1 + \varphi)^3 [\varphi x^2 + 2(1 + 2\varphi)wx - (\varphi - 1)wz] \\ - \varepsilon^3 (1 + \varphi)^2 [(1 + 2\varphi)wx - 2(1 + 2\varphi)wz + (1 + 2\varphi)x^2 + (1 - 2\varphi)xz]w \\ - \varepsilon^2 (1 + \varphi) [\varphi x^2 z + 2(1 + 2\varphi)xzw + (2 + \varphi)wz^2 - (1 + \varphi)wx^2]w \\ + \varepsilon [(1 + 2\varphi)x^2 z + xz^2 + (1 + 2\varphi)wxz - (1 + 2\varphi)wz^2]w^2 \\ - w^3 z (x^2 - z^2) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Zum Schluß noch eine Bemerkung zu den Sättigungswerten n_0^- und n_0^+ der Konzentrationen. Für diese ergeben sich noch Bedingungsgleichungen durch Nullsetzen der Differentialquotienten im System (8). Wir haben zu prüfen, ob wir diese Bedingungsgleichungen bereits durch unsere bisherigen Überlegungen erfaßt haben. Wie eine kurze Rechnung zeigt, ist das der Fall. Aus der ersten Gl. (8) erhält man für n_0^+ die Relation (13), und durch Einsetzen dieser in die zweite Gl. (8) ergibt sich gerade die Relation, die wir schon durch den Koeffizientenvergleich für $\varepsilon^0 x^4$ erhalten haben.

Für die praktische Rechnung ist noch folgendes zu beachten: Aus (18) ergibt sich, daß stets

$$\alpha \delta < \beta \varepsilon$$

sein muß. Dann folgt aus (19)

$$\frac{x^2 - (1 + 2\varphi)\varepsilon x}{\varepsilon x + wz - (1 + \varphi)^2 \varepsilon^2} < 1,$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(1 + \varphi) > x + \sqrt{wz}; \quad \varepsilon(1 + \varphi) \geq x - \sqrt{wz} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &> \text{für } \varphi < \left\{ \frac{\sqrt{wz}}{x - 2\sqrt{wz}} \right. \\ &< \text{für } \varphi > \end{aligned}$$

An Hand der praktischen Beispiele hat sich gezeigt, daß die erste dieser beiden Ungleichheiten die maßgebende ist. Für die Auflösung der beiden Gl. (21), (22) sind somit nur Lösungen von Interesse, die der Relation genügen:

$$\varepsilon(1 + \varphi) > x + \sqrt{wz}.$$

Etwaige andere Lösungen sind aus physikalischen Gründen zu verwerfen. Wie die praktische Rechnung durchzuführen ist, sehen wir am besten an den jetzt folgenden Beispielen.

6. Beispiele zum Modell I.

Von den Beispielen beruhen 1, 2 und 3 auf Messungen von Seraphin^{a)}, während Beispiel 4. eine Erfindung des Verfassers darstellt.

^{a)} Diese Messungen wurden zu einer Zeit gemacht, als der Verfasser noch nicht im Institut arbeitete, während andererseits Herr Dr. Seraphin schon nicht mehr Mitarbeiter des Instituts war, als diese Theorie entstand. Infolgedessen war es dem Verfasser nicht möglich, die einzelnen Umstände bei der Durchführung der Messungen in dem Maße zu erfahren, wie es eigentlich notwendig wäre, um zu beurteilen, ob die vorliegenden Messungen wirklich als einwandfreie Grundlage für das in der Einkantung gestellte Problem angesehen werden können. Daher mögen die hier verwendeten Beispiele zunächst nur veranschaulichen, wie die Methode arbeitet. Weitreichendere physikalische Schlußfolgerungen sollen jedoch erst gezogen werden, wenn eine größere Anzahl neuer Messungen mit Hilfe der Theorie ausgewertet ist. Damit soll demnächst begonnen werden, und es ist beabsichtigt, in einer späteren Arbeit über die Ergebnisse zu berichten.

Beispiel 1 zeigt einen sehr langsam abklingenden Kristall. Er wurde aus einer Entfernung von „7 cm“ bestrahlt*).

Wir erreichen mit dem Ansatz (12), (15) eine gute Annäherung an die experimentell gegebene An- und Abklingkurve, wenn wir setzen:

$$x = 24 \cdot 10^3; \quad z = 13 \cdot 10^3; \quad w = 0,3 \cdot 10^3.$$

Das Verhältnis von Abklingzeit zu Anklingzeit wird durch $\frac{x}{w}$ charakterisiert.

Hier ist $\frac{x}{w} = 80$.

Mit $\eta = \varepsilon \cdot 10^{-3}$ nehmen die Gln. (21) und (22) folgende Form an:

$$(1 + \varphi)^4 (1 + 2\varphi) \eta^5 - 24 (1 + \varphi)^3 (4 + 5\varphi) \eta^4 + (1 + \varphi)^2 (2879,4 + 1726,8 \varphi) \eta^3 - 24 (1 + \varphi) (1146,3 - 9,6 \varphi) \eta^2 - (2950,47 + 6764,94 \varphi) \eta + 926,64 = 0.$$

und

$$(1 + \varphi)^5 \varphi \eta^6 - (1 + \varphi)^4 (0,3 + 48,6 \varphi) \eta^5 + (1 + \varphi)^3 (18,3 + 600,9 \varphi) \eta^4 - (1 + \varphi)^2 (266,22 + 158,04 \varphi) \eta^3 - (1 + \varphi) (34,74 + 2322,09 \varphi) \eta^2 + (1042,82 + 1355,56 \varphi) \eta - 142,86 = 0.$$

Die einzige physikalisch sinnvolle Lösung (vgl. S. 338 unten) dieser beiden Gleichungen ist:

$$\eta = 47,5; \quad \varphi = 0,0029,$$

also

$$\varepsilon = 4,75 \cdot 10^4; \quad \frac{\beta}{\alpha} = 0,29 \cdot 10^{-3}.$$

Dann ergibt sich nacheinander aus (19), (18), (20):

$$\delta = 0,70 \cdot 10^3; \quad \alpha H = 2,35 \cdot 10^4; \quad \alpha n_0^- = 0,15 \cdot 10^3;$$

und ferner aus (17), (15), (13):

$$\gamma \approx \alpha; \quad \alpha Z = 1,95 \cdot 10^4; \quad \alpha n_0^+ = 2,36 \cdot 10^4; \quad h_0 = 0,999 H.$$

Beispiel 2 zeigt einen etwas schneller abklingenden Kristall. Er wurde auch aus einer Entfernung von „7 cm“ bestrahlt.

Die experimentell vorgegebene An- und Abklingkurve wird durch den Ansatz (12), (15) gut wiedergegeben, wenn wir setzen:

$$x = 20 \cdot 10^3; \quad z = 15 \cdot 10^3; \quad w = 0,8 \cdot 10^3.$$

Hier ist also $\frac{x}{w} = 25$.

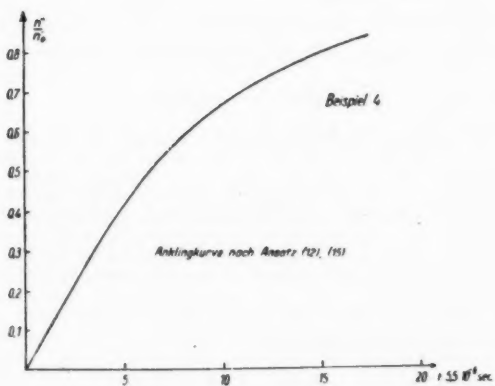
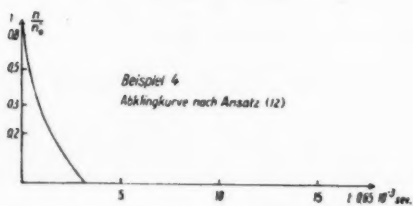
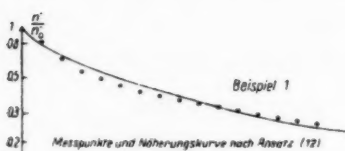
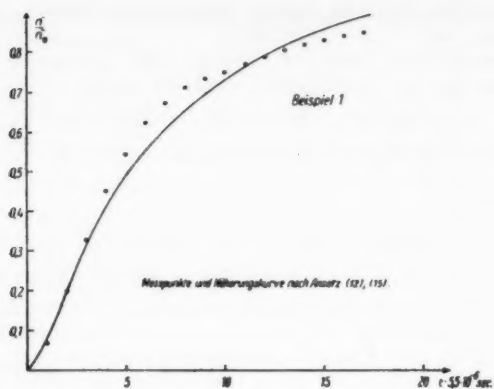
Mit $\eta = \varepsilon \cdot 10^{-3}$ nehmen die Gln. (21), (22) folgende Form an:

$$(1 + \varphi)^4 (1 + 2\varphi) \eta^5 - 20 (1 + \varphi)^3 (4 + 5\varphi) \eta^4 + (1 + \varphi)^2 (1992 + 1184 \varphi) \eta^3 - 20 (1 + \varphi) (764 - 48 \varphi) \eta^2 - (11248 + 14496 \varphi) \eta + 2880 = 0$$

und

$$(1 + \varphi)^5 \varphi \eta^6 - (1 + \varphi)^4 (41,6 \varphi + 0,8) \eta^5 + (1 + \varphi)^3 (452 \varphi + 44) \eta^4 - (1 + \varphi)^2 (147,2 \varphi + 553,6) \eta^3 - (1 + \varphi) (5456 \varphi + 416) \eta^2 + (7756,8 \varphi + 6758,4) \eta - 1344 = 0.$$

*) Vgl. die genannte Arbeit von Faßbender-Seraphin.



Als einzige physikalisch sinnvolle Lösung ergibt sich:

$$\eta = 39,4; \quad \varphi = 0,0050,$$

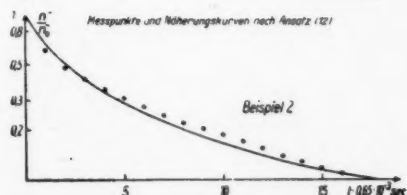
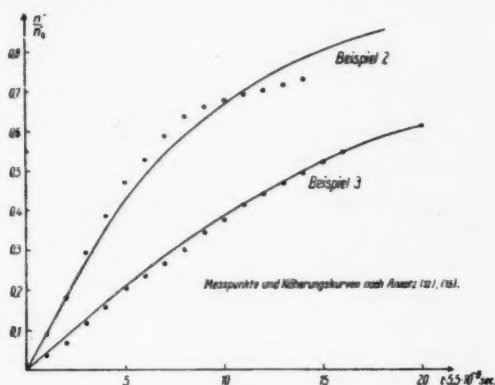
also

$$\varepsilon = 3,94 \cdot 10^4; \quad \frac{\beta}{\alpha} = 0,5 \cdot 10^{-2}.$$

Wir erhalten dann aus (19), (18), (20), (17), (15), (13):

$$\begin{aligned} \delta &= 1,02 \cdot 10^2; & \alpha H &= 1,92 \cdot 10^4; & \alpha n_0^- &= 0,41 \cdot 10^2; \\ \gamma &\approx \alpha; & \alpha Z &= 6,15 \cdot 10^4; & \alpha n_0^+ &= 1,94 \cdot 10^4; & h_0^- &= 0,996 H. \end{aligned}$$

Beispiel 3 gibt denselben Kristall wieder wie Beispiel 2, nur dieses Mal aus einer Entfernung von „14 cm“ bestrahlt.



Die An- und Abklingkurve wird durch unser Modell gut wiedergegeben, wenn wir setzen:

$$x = 9 \cdot 10^3; \quad z = 7 \cdot 10^3; \quad w = 0,6 \cdot 10^3;$$

Jetzt ist also $\frac{x}{w} = 15$.

Mit $\eta = \varepsilon \cdot 10^{-3}$ ergeben sich Gl. (21) und (22) zu:

$$(1 + \varphi)^4 (1 + 2\varphi) \eta^5 - 9(1 + \varphi)^3 (4 + 5\varphi) \eta^4 + (402 + 237\varphi) (1 + \varphi)^2 \eta^3 - 9(1 + \varphi) (148,8 - 17,4\varphi) \eta^2 - (831,24 + 1030,68\varphi) \eta + 136,08 = 0$$

und

$$(1 + \varphi)^5 \varphi \eta^6 - (1 + \varphi)^4 (19,2\varphi + 0,6) \eta^5 + (1 + \varphi)^3 (98,4\varphi + 15) \eta^4 - (1 + \varphi)^2 (18\varphi + 84,6) \eta^3 - (1 + \varphi) (419,4\varphi + 51,48) \eta^2 + (414,29\varphi + 365,9) \eta - 48,38 = 0.$$

Die einzige physikalisch sinnvolle Lösung ist:

$$\eta = 17,5; \quad \varphi = 0,0070,$$

also

$$\varepsilon = 1,75 \cdot 10^4; \quad \frac{\beta}{\alpha} = 0,7 \cdot 10^{-2}.$$

Ferner ergibt sich aus (19), (18), (20), (17), (15), (13):

$$\delta = 0,64 \cdot 10^3; \quad \alpha H = 0,83 \cdot 10^4; \quad \alpha n_0^- = 0,31 \cdot 10^3;$$

$$\gamma \approx \alpha; \quad \alpha Z = 2,2 \cdot 10^4; \quad \alpha n_0^+ = 0,85 \cdot 10^4; \quad h_0^- = 0,993 H.$$

Beispiel 4 ist eine Erfindung. Wir nehmen an, die Kurve sei durch Bestrahlung aus einer Entfernung von „7 cm“ entstanden.

Wir setzen

$$x = 20 \cdot 10^3; \quad z = 15 \cdot 10^3; \quad w = 4 \cdot 10^3.$$

Es handelt sich also um einen verhältnismäßig schnell abklingenden Kristall mit $\frac{x}{w} = 5$.

Mit $\eta = \varepsilon \cdot 10^{-3}$ nehmen die Gln. (21), (22) die Form an:

$$(1 + \varphi)^4 (1 + 2\varphi) \eta^5 - 20(1 + \varphi)^3 (4 + 5\varphi) \eta^4 + (1 + \varphi)^2 (1960 + 1120\varphi) \eta^3 - 20(1 + \varphi) (620 - 240\varphi) \eta^2 - (57200 + 74400\varphi) \eta + 72000 = 0$$

und

$$(1 + \varphi)^5 \varphi \eta^6 - (1 + \varphi)^4 (4 + 48\varphi) \eta^5 + (1 + \varphi)^3 (220 + 660\varphi) \eta^4 - (1 + \varphi)^2 (2640 + 480\varphi) \eta^3 - (1 + \varphi) (10400 + 40400\varphi) \eta^2 + (172800 + 201600\varphi) \eta - 168000 = 0.$$

Als einzige physikalisch sinnvolle Lösung ergibt sich:

$$\eta = 36,6; \quad \varphi = 0,019,$$

also

$$\varepsilon = 3,66 \cdot 10^4; \quad \frac{\beta}{\alpha} = 1,9 \cdot 10^{-2}.$$

Dann folgt aus (19), (18), (20), (17), (15), (13):

$$\delta = 4,18 \cdot 10^2; \quad \alpha H = 1,49 \cdot 10^4; \quad \alpha n_0^- = 2,36 \cdot 10^3;$$

$$\gamma \approx \alpha; \quad \alpha Z = 35,4 \cdot 10^4; \quad \alpha n_0^+ = 1,71 \cdot 10^4; \quad h_0^- = 0,99 H.$$

Für eine kurze Diskussion dieses Ergebnisses wollen wir davon ausgehen, daß die stationäre Stromdichte j_0 in allen vier Fällen gleich groß war. Es gilt also

$$b_1 n_{01}^- = b_2 n_{02}^- = b_3 n_{03}^- = b_4 n_{04}^-.$$

Die angehängten Indizes beziehen sich auf die Nummer des Beispiels. Es wird allgemein angenommen, daß die Beweglichkeit mit steigendem Haftstellengehalt etwas abnimmt; wir setzen z. B.

$$b_1 = 0,8 b_2; \quad b_1 = 0,5 b_4.$$

Dann ist

$$n_{01}^- = 1,25 n_{02}^-; \quad n_{01}^- = 2 n_{04}^-$$

und

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 0,3; \quad \frac{H_1}{H_2} = 4; \quad \frac{Z_1}{Z_2} = 1,06; \quad \frac{(H - \bar{h}_0)_1 \epsilon_1 + Z_1}{(H - \bar{h}_0)_2 \epsilon_2 + Z_2} = 1,17$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_4} = 0,03; \quad \frac{H_1}{H_4} = 53; \quad \frac{Z_1}{Z_4} = 1,82; \quad \frac{(H - \bar{h}_0)_1 \epsilon_1 + Z_1}{(H - \bar{h}_0)_4 \epsilon_4 + Z_4} = 2,43.$$

Dabei ist $(H - \bar{h}_0) \epsilon + Z$ die Zahl der pro sec und cm³ im Grundband im stationären Zustand angeregten Elektronen beziehungsweise absorbierten Lichtquanten. Dieser Wert wird nicht genau sein, da in unserer Berechnung die Differenz $(H - \bar{h}_0^-)$ im allgemeinen mit einem erheblichen relativen Fehler behaftet ist.

Setzt man schließlich z. B.

$$b_2 = 0,8 b_3; \quad n_{02}^- = 1,25 n_{03}^-$$

so ist

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = 1,06; \quad \frac{H_2}{H_3} = 2,1; \quad \frac{Z_2}{Z_3} = 2,7; \quad \frac{(H - \bar{h}_0)_2 \epsilon_2 + Z_2}{(H - \bar{h}_0)_3 \epsilon_3 + Z_3} = 2,65.$$

Wie schon früher bemerkt, wollen wir jetzt noch keine physikalischen Schlußfolgerungen aus diesen Ergebnissen ziehen, sondern uns mit der Feststellung begnügen, daß die mitgeteilten Werte zunächst als durchaus befriedigend angesehen werden können.

Die charakteristischen Unterschiede im Haftstellengehalt zwischen langsam und schnell abklingenden Kristallen werden durch das Modell gut wiedergegeben. Auch die Abweichungen, die beim Vergleich der Beispiele 2 und 3 von den bei einer idealen Theorie zu erwartenden Werten auftreten, sind erträglich, wenn man bedenkt, daß unser Modell mit drei Energiebändern immer noch eine große Vereinfachung des wirklichen physikalischen Sachverhaltes darstellt.

Wenn man $Z \approx 10^{10}$ annimmt, liegen die Absolutwerte der Konstanten bei allen vier Beispielen durchaus in der Größenordnung, in der man sie bereits auf Grund von experimentellen Untersuchungen vermutet hat.

7. Das Modell Nr. II

Das Modell I aus Punkt 5 lieferte eine Lösung für das Dgl.-System (1) mit Berücksichtigung der Haftstellen.

Genau so wollen wir nun eine Lösung für das System (2) mit Berücksichtigung der Aktivatoren aufbauen. Die ganzen Überlegungen verlaufen dabei völlig analog zu denen in Punkt 5, so daß wir uns kurz fassen werden.

Mit $n^-(t) = f(t)$ und $a^+(t) = f(t) - n^+(t)$ erscheint das System (2) in der Form

$$\left. \begin{aligned} f'(t) &= Z - \alpha f^2 + \alpha f n^+ + \delta A - \delta f + \delta n^+ - \gamma f n^+ \\ \frac{dn^+}{dt} &= Z - \beta A n^+ + \beta f n^+ - \beta n^{+2} + \varepsilon f - \varepsilon n^+ - \gamma f n^+ \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Aus der ersten Gl. (23) folgt

$$n^+(t) = \frac{f' + \alpha f^2 + \delta f - \delta A - Z}{(\alpha - \gamma) f + \delta} \quad (24)$$

Die zweite Gl. (23) ist wieder durch Koeffizientenvergleich zu erfüllen, Sie lautet

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{f' + \alpha f^2 + \delta f - \delta A - Z}{(\alpha - \gamma) f + \delta} &= Z - \beta \left(\frac{f' + \alpha f^2 + \delta f - \delta A - Z}{(\alpha - \gamma) f + \delta} \right)^2 \\ + ((\beta - \gamma) f - \beta A - \varepsilon) \frac{f' + \alpha f^2 + \delta f - \delta A - Z}{(\alpha - \gamma) f + \delta} &+ \varepsilon f \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Unser Ansatz für den An- und Abklingvorgang ist auch hier:

$$\left. \begin{aligned} f_1(t) &= n_0^- (1 - e^{-\varepsilon t}) \\ f_2(t) &= \frac{n_0}{w t + 1} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Für den Abklingvorgang sind jetzt δ und Z gleich Null zu setzen. Aus Gl. (24) folgt für die stationäre Löcherkonzentration, je nachdem man sie als Endzustand des Anklingvorganges oder als Anfangszustand des Abklingvorganges betrachtet

$$n_0^+ = \frac{\alpha n_0^{-2} + \delta n_0 - \delta A - Z}{(\alpha - \gamma) n_0 + \delta} = \left(\frac{\alpha n_0^{-2} + f_2'(0)}{(\alpha - \gamma) n_0} \right). \quad (26)$$

Diese Relation braucht für den Ansatz (12) nicht streng erfüllt zu sein; wir definieren vielmehr n_0^+ durch die linke Seite der Gl. (26). Die Übereinstimmung zwischen linker und eingeklammerter rechter Seite wird dann im allgemeinen nur für $f_2'(0) = -w^* n_0^-$ vorhanden sein, wobei w^* von dem w aus (12) verschieden ist. (Vgl. hierzu die entsprechenden Überlegungen in Punkt 5.)

Aus der Bedingung $n^+(0) = 0$ für den Anklingvorgang folgt $Z + \delta A = f_1'(0)$. Wir setzen

$$Z + \delta A = z n_0^- \quad (27)$$

genau wie früher ohne Rücksicht auf Gl. (12), die uns ja lediglich den überwiegenden Teil des Verlaufes von $n^-(t)$ wiedergeben soll. Die Durchführung des Koeffizientenvergleiches, um die Relation (25) für den Ansatz (12) zu erfüllen, erfolgt wie in Punkt 5. Wir geben hier nur das Ergebnis an:

Der Abklingvorgang mit $f_2(t)$ liefert uns die Relationen

$$\gamma = \alpha + \beta \quad (28)$$

$$\beta A = \varepsilon \frac{w - \alpha n_0^- - \beta n_0^-}{\alpha n_0^- - w} \quad (29)$$

Der Koeffizientenvergleich des Anklingvorganges für $e^{-3\alpha t}$ und $e^{-2\alpha t}$ ergibt unter Berücksichtigung von (27), (28), (29):

$$\beta A = \frac{\alpha + \beta}{\alpha \beta} (\alpha \delta - \beta \varepsilon) \quad (30)$$

$$\varepsilon = \delta \varphi \frac{(1 + \varphi) w z - \varphi x^2 + \varphi (1 + 2\varphi) \delta x - \varphi (1 + \varphi)^2 \delta^2}{w z - \varphi \delta x} \quad (31)$$

Dabei ist $\varphi = \frac{\alpha}{\beta}$. Weiter folgt aus (29) und (30):

$$n_0^- = \frac{w}{\alpha} \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha} \frac{1}{\alpha + \beta} \frac{\varepsilon}{\delta} \right). \quad (32)$$

Schließlich erhalten wir noch durch den Koeffizientenvergleich für e^{-x^2} und $e^{-\varphi x^2}$ bei Berücksichtigung von (27), (28), (29), (30), (31), (32):

$$\begin{aligned} & \delta^8 \varphi^2 (1 + \varphi)^4 - \delta^6 \varphi (1 + \varphi)^2 [\varphi x + (1 + \varphi) w] \\ & + \delta^4 \varphi (1 + \varphi)^2 [(2 + 3\varphi) w x - 2\varphi x^2 - (3 + 5\varphi) w z] \\ & + \delta^2 (1 + \varphi) [2\varphi^2 x^3 + \varphi (1 + \varphi) w x^2 + \varphi (6 + 7\varphi) w x z + (1 + \varphi) (2 + 3\varphi) w^2 z] \\ & - \delta^2 [2\varphi (2 + 3\varphi) w x^3 + \varphi (1 - \varphi) w x^2 z + (7 + 18\varphi + 12\varphi^2) w^2 x z \\ & - (2 + 7\varphi + 6\varphi^2) w^2 z^2] + \delta [2\varphi w x^4 - 2\varphi w x^2 z + 4 (2 + 3\varphi) w^2 x^2 z \\ & - (5 + 9\varphi) w^2 x z^2] - 3 w^2 x^2 z (x - z) = 0; \end{aligned} \quad (33)$$

und

$$\begin{aligned} & \delta^8 \varphi^2 (1 + \varphi)^5 [\varphi x + (1 + \varphi) w] - \delta^7 \varphi (1 + \varphi)^4 [2\varphi^2 x^2 + \varphi (4 + 5\varphi) w x \\ & + (1 + \varphi)^2 w^2 + \varphi (1 + \varphi) w z] + \delta^6 \varphi (1 + \varphi)^3 [\varphi^2 x^3 + 2\varphi (3 + 4\varphi) w x^2 \\ & + 2 (1 + \varphi) (2 + 3\varphi) w^2 x - \varphi (1 + 3\varphi) w x z - 2 (1 + \varphi) (1 + 2\varphi) w^2 z] \\ & - \delta^5 (1 + \varphi)^2 [\varphi^2 (4 + 5\varphi) w x^3 + \varphi (6 + 16\varphi + 11\varphi^2) w^2 x^2 \\ & - 3\varphi^2 (2 + 3\varphi) w x^2 z - \varphi (9 + 26\varphi + 19\varphi^2) w^2 x z - \varphi (1 + \varphi) (3 + 5\varphi) w^2 z^2 \\ & - (1 + \varphi)^2 (2 + 3\varphi) w^3 z] + \delta^4 (1 + \varphi) [\varphi^2 (1 + \varphi) w x^4 + 2\varphi (1 + \varphi) (2 + 3\varphi) w^2 x^3 \\ & - \varphi^2 (5 + 6\varphi) w x^2 z - \varphi (16 + 44\varphi + 30\varphi^2) w^2 x^2 z - (1 + \varphi) (9 + 26\varphi + 19\varphi^2) w^3 x z \\ & - \varphi (5 + 10\varphi + 4\varphi^2) w^2 x z^2 + \varphi (1 + \varphi) (2 + 3\varphi) w^3 z^2] - \delta^3 [\varphi (1 + \varphi)^2 w^2 x^4 \\ & - \varphi^2 (1 + \varphi) w x^4 z - \varphi (14 + 36\varphi + 23\varphi^2) w^2 x^3 z \\ & - (2 + 3\varphi) (8 + 20\varphi + 13\varphi^2) w^3 x^2 z + \varphi^2 (4 + 5\varphi) w^2 x^2 z^2 \\ & + \varphi (5 + 14\varphi + 10\varphi^2) w^3 x z^2 + (1 + \varphi) (1 + 2\varphi) (2 + 3\varphi) w^3 z^3] \\ & - \delta^2 [2\varphi (3 + 4\varphi) w^2 x^4 z + (14 + 40\varphi + 29\varphi^2) w^3 x^3 z - \varphi (3 + 5\varphi) w^2 x^3 z^2 \\ & - 2\varphi (2 + 3\varphi) w^3 x^2 z^2 - (5 + 15\varphi + 11\varphi^2) w^3 x z^3] + \delta [\varphi w^2 x^5 z \\ & + 3 (2 + 3\varphi) w^3 x^4 z - \varphi w^2 x^4 z^2 - \varphi w^3 x^3 z^2 - 2 (2 + 3\varphi) w^2 x^3 z^3] \\ & - w^3 x^3 z (x^2 - z^2) = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Der Rechnungsgang verläuft ähnlich wie früher so, daß zunächst aus (33) und (34) φ und δ und darauf die übrigen Konstanten aus den Gln. (26) bis (32) ermittelt werden.

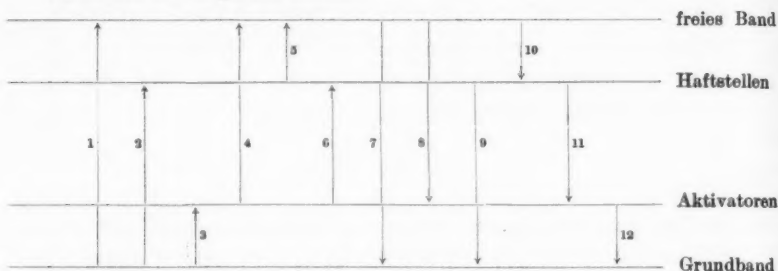
Auch hier haben wir die sich aus dem System (23) (durch Nullsetzen der Ableitungen) für die Sättigungswerte n_0^- , n_0^+ ergebenden Bedingungsgleichungen bereits durch die Relationen (26) und (34) erfaßt. Auf das Durchrechnen von Beispielen wird an dieser Stelle verzichtet.

8. Ausdehnung der Lösungsmethode auf Probleme der Leitfähigkeit und Lumineszenz

Zum Schluß soll noch gezeigt werden, daß die in dieser Arbeit entwickelte Lösungsmethode auch auf Probleme der Leitfähigkeit und Lumineszenz angewendet werden kann.

Die Problemstellung aus der Einleitung bleibt prinzipiell unverändert, nur daß jetzt nicht nur die gemessene An- und Abklingkurve der Leitfähigkeit, sondern auch die gleichzeitig gemessene An- und Abklingkurve der Lumineszenz vorgegeben ist. In diesem Fall können wir für die Auflösungstheorie das vollständige Modell mit vier Energiebändern zugrunde legen.

Wir haben also folgendes Schema:



Dabei ist

n^- = Konzentration der Elektronen im freien Band pro cm^3

h^- = Konzentration der Elektronen in den Haftstellen pro cm^3

a^+ = Konzentration der Löcher in den Aktivatoren pro cm^3

n^+ = Konzentration der Löcher im Grundband pro cm^3 .

Die Gesamtkonzentration der Haftstellen sei H (pro cm^3).

Die Gesamtkonzentration der Aktivatoren sei A (pro cm^3).

Es ist gegeben:

Übergang 1 durch Z

Übergang 2 durch $\eta(H-h^-)$

Übergang 3 durch ϑa^+

Übergang 4 durch $\lambda(A-a^+)$

Übergang 5 durch κh^-

Übergang 6 durch $\mu(A-a^+)(H-h^-)$

Übergang 7 durch: $\alpha n^- n^+$

Übergang 8 durch: $\beta n^- a^+$

Übergang 9 durch $\gamma h^- n^+$

Übergang 10 durch $\delta n^- (H-h^-)$

Übergang 11 durch $\varepsilon h^- a^+$

Übergang 12 durch $\zeta n^+ (A-a^+)$.

Das Differentialgleichungssystem für die Konzentrationen lautet also:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn^-}{dt} &= Z + \lambda(A-a^+) + \kappa h^- - \alpha n^- n^+ - \beta n^- a^+ - \delta n^- (H-h^-) \\ \frac{dh^-}{dt} &= \eta(H-h^-) + \mu(A-a^+)(H-h^-) - \kappa h^- - \gamma h^- n^+ + \delta n^- (H-h^-) - \varepsilon h^- a^+ \\ \frac{da^+}{dt} &= \lambda(A-a^+) - \vartheta a^+ + \mu(A-a^+)(H-h^-) - \beta n^- a^+ - \varepsilon h^- a^+ + \zeta n^+ (A-a^+) \\ \frac{dn^+}{dt} &= Z + \eta(H-h^-) + \vartheta a^+ - \alpha n^- n^+ - \gamma h^- n^+ - \zeta n^+ (A-a^+) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Dazu kommt noch die Neutralitätsbedingung

$$n^- + h^- = n^+ + a^+. \quad (35')$$

In der Lumineszenzphysik wird angenommen¹⁰⁾, daß nur der Übergang von Elektronen aus dem freien Band in die Aktivatoren unter Lichtemission vor sich geht. Die Anzahl der (pro sec und cm³) emittierten Lichtquanten ist dann gegeben durch

$$L = \beta n^- a^+.$$

Aus der vorgegebenen Meßkurve der Leitfähigkeit entnehmen wir nun wie in Punkt 4:

$$n^-(t) = f(t), \quad (36)$$

indem wir die Meßkurve durch eine analytische Funktion approximieren. Aus der Meßkurve der Lumineszenz entnehmen wir $L(t)$ und damit wegen (36) auch

$$a^+(t) = g(t). \quad (37)$$

Auch $g(t)$ stellt eine Näherung dar. Nach (35') ist

$$h^- = n^+ + g - f.$$

Mit dieser Relation wird h^- aus dem System (35) eliminiert; das System (35) nimmt dann nach Einsetzen von (36) und (37) die Form an:

$$\left. \begin{aligned} f'(t) &= Z + \lambda(A - g) + \alpha n^+ + \alpha g - \alpha f - \alpha f n^+ - \beta f g \\ &\quad - \delta f(H - n^+ - g + f) \\ g'(t) &= \lambda(A - g) - \vartheta g + \mu(A - g)(H - n^+ - g + f) - \beta f g \\ &\quad - \varepsilon g(n^+ + g - f) + \zeta n^+(A - g) \\ \frac{dn^+}{dt} &= Z + \eta(H - n^+ - g + f) + \vartheta g - \alpha f n^+ - \gamma(n^+ + g - f)n^+ \\ &\quad - \zeta n^+(A - g). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Wir berechnen $n^+(t)$ einmal aus der ersten und dann aus der zweiten Gleichung des Systems (38) und erhalten durch Gleichsetzen:

$$\left. \begin{aligned} n^+(t) &= \frac{f' - \lambda(A - g) - \alpha g + \alpha f + \beta f g + \delta f(H - g + f) - Z}{(\delta - \alpha)f + \alpha} \\ &= \frac{g' - \lambda(A - g) + \vartheta g - \mu(A - g)(H - g + f) + \beta f g + \varepsilon g(g - f)}{(\zeta - \mu)(A - g) - \varepsilon g} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Schließlich liefert uns die letzte Gleichung des Systems (38)

$$\frac{dn^+}{dt} = -\gamma n^{+2} + (\gamma f - \alpha f - \gamma g - \eta - \zeta A + \zeta g)n^+ + Z + \eta(H - g + f) + \vartheta g, \quad (40)$$

wobei $n^+(t)$ entsprechend (39) einzusetzen ist.

Die Relationen (39) und (40) werden natürlich nicht identisch in t für Ankling- und Abklingvorgang erfüllt sein, denn (36) und (37) sind ja keine strengen Lösungen des Systems (35).

Wie früher (vgl. Punkt 4) wird man jedoch jetzt die zur Verfügung stehenden Parameter ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \vartheta, \alpha, \lambda, \mu, A, H, Z$) so bestimmen, daß die Relationen (39) und (40) möglichst gut erfüllt sind.

Hierfür ist wieder die Methode des Koeffizientenvergleiches mit einem Ansatz für $f(t)$ und $g(t)$ ähnlich wie (12) am geeignetsten.

¹⁰⁾ Vgl. z. B. die genannte Arbeit von Broser-Warminsky.

Die einzelnen Untersuchungen dazu und die Ausarbeitung eines Modells, das naturgemäß komplizierter als die Modelle I und II sein wird, werden vom Verfasser zur Zeit durchgeführt.

Darüber soll dann nach Durchführung und Auswertung der entsprechenden Messungen berichtet werden.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und für eine Reihe wertvoller Hinweise bei ihrer Durchführung danke ich Herrn Professor Dr. F. Möglich.

Berlin-Buch, Institut für Festkörperforschung der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

(Bei der Redaktion eingegangen am 20. April 1953.)

An
sorpt
der U
wurd
Elekt

A
ausse
lichke
geste
lichtu
wird
Z
der I

wobe

D
Anna

d. h.
wird

1)
2)
3)

Halleffekt-Messungen an CdS-Kristallen

Von H. Diedrich

(Mit 2 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

An CdS-Kristallen wurde der Hall-Effekt bei Einstrahlung im gesamten Absorptionsgebiet bei verschiedenen Intensitäten gemessen. Die Beweglichkeiten der Überschuß-Elektronen liegen zwischen 20 und 400 [cm sec⁻¹/V cm⁻¹]. Es wurde eine Abhängigkeit der Beweglichkeit von der Konzentration der Leitungselektronen festgestellt.

1. Einleitung

Aus Halleffekt-Messungen lassen sich, unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen, Aussagen über Art, Konzentration und mikroskopische Beweglichkeit der freien Ladungsträger machen. An nach bekannten Verfahren¹⁾ hergestellten CdS-Kristallen wurden Halleffekt-Messungen bei verschiedenen Beleuchtungs-Intensitäten durchgeführt. Über die Ergebnisse dieser Untersuchungen wird berichtet²⁾.

Zwischen der Hall-Konstanten R_H und der Elektronen-Konzentration n_L^- bzw. der Löcher-Konzentration n_L^+ besteht der folgende Zusammenhang:

$$R_H = \frac{a}{e} \frac{b_M^{+2} n_L^+ - b_M^{-2} n_L^-}{(b_M^+ n_L^+ + b_M^- n_L^-)^2} \quad (1)$$

wobei a = Entartungsfaktor (bei Nichtentartung = $\frac{3\pi}{8}$)

e = Elementarladung;

b_M^+, b_M^- = Mikroskopische Beweglichkeit der Löcher im Valenzband und der Elektronen im Leitungsband;

n_L^+, n_L^- = Konzentration im Valenz- und Leitungsband.

Der bei CdS gemessene hohe Verstärkungs-Effekt³⁾ rechtfertigt die folgende Annahme:

$$b_M^+ n_L^+ \ll b_M^- n_L^-, \quad (2)$$

d. h. das Produkt aus Beweglichkeit und Konzentration der Überschußelektronen wird als wesentlich größer gegenüber dem gleichen Produkt für Defekt-Elektronen

¹⁾ R. Frerichs, Naturwiss. 33, 281 (1946).

²⁾ H. Diedrich, Diplomarbeit, Januar 1951.

³⁾ J. Faßbender, Ann. Physik (6) 5, 33 (1949).

angenommen. Unter dieser Annahme wird

$$R_H = -\frac{3\pi}{8} \frac{1}{e n_L}. \quad (3)$$

Die Hall-Konstante R_H wird aus der gemessenen Hall-Spannung errechnet. Es ist

$$R_H = \frac{2d}{B} \cdot \frac{U_K}{J} [\text{cm}^3/\text{A sec}], \quad (4)$$

wobei U_K = Hallspannung nach Kolacek-Methode⁴⁾ [V];

d = Dicke des stromleitenden Bereiches [cm];

J = Primärstrom [A];

B = magn. Induktion [Gauß].

Bei den gemessenen hohen Absorptionskoeffizienten K von $10^4 - 10^5 [\text{cm}^{-1}]$ des CdS⁵⁾ wäre es bei Einstrahlung im Grundgittergebiet denkbar, daß die Kristall-dicke d_K nicht mit der Dicke d des stromführenden Bereiches identisch ist. Die Stromdichte würde dann, wie die Anregungsdichte, mit der Eindringtiefe exponentiell abnehmen⁶⁾ ($d \approx 10^{-6} \text{ cm}$).

Wegen Gleichung (2) ist die Leitfähigkeit σ :

$$\sigma = e \bar{b}_M n_L^-; \quad (5)$$

und damit die Hall-Beweglichkeit b_H

$$b_H = R_H \sigma \approx \bar{b}_M. \quad (6)$$

Da

$$e b_H \left(\frac{dU}{dx} \right)_a \cdot B - e E_H = 0;$$

so ist

$$b_H = E_H / B \left(\frac{dU}{dx} \right)_a; \quad (7)$$

d. h. nur von der Hall-Feldstärke E_H und von der am Ort a der Hall-Elektrode herrschenden Feldstärke $\left(\frac{dU}{dx} \right)_a$ abhängig (U = Treibspannung).

2. Meßmethode und Ergebnisse

Die CdS-Kristalle hatten eine Größe von $3 \times 0,5 \cdot 10^{-2} [\text{mm}^3]$ und wurden im Vakuum mit Gold-Elektroden bedampft. Gemessen wurde nach der Kolacek-Methode, die nur eine Hall-Elektrode erfordert. Mit Rücksicht auf die kleinen Kristalle war dies von wesentlichem Vorteil. Die spitz zulaufende Hall-Elektrode hatte eine Länge von 0,2 mm. Der Kristall wurde auf Glimmer aufgeklebt und während der Messung durch Luftstrom gekühlt. Das kommutierbare, in der Kri-

⁴⁾ Kolacek, Ann. Physik 39, 1491 (1912).

⁵⁾ R. Seiwert, Ann. Physik 6, 241 (1949).

⁶⁾ J. Faßbender, l. c.

stallgröße genügend homogene Magnetfeld betrug 12 k Gauß. Eingestrahlt wurde gleichzeitig im Grundgitter- und Ausläufergebiet, wobei der rote Spektralanteil der HBO-Lampe durch geeignete Schott-Filter ausgefiltert wurde.

Alle Kristalle zeigten normalen Hall-Effekt (negatives Vorzeichen der Hall-Konstante), also Elektronen-Leitung. An einem Kristall konnte der Hall-Effekt auch ohne Belichtung gemessen werden ($I_0 = 10^{-9}$ A bei 200 V). Auch er zeigte Überschußleitung und eine Hall-Beweglichkeit von 420 [$\text{cm sec}^{-1}/\text{V cm}^{-1}$].

In Abb. 1 ist die Hall-Beweglichkeit b_H gegen die Elektronen-Konzentration n_L aufgetragen. Bis zu n_L -Werten von 10^{13} [cm^{-3}] fällt die Hall-Beweglichkeit b_H langsam auf Werte zwischen 100 und 200 [$\text{cm sec}^{-1}/\text{V cm}^{-1}$] ab und fällt dann nach einem kurzen Anstieg bei n_L -Werten $> 2 \cdot 10^{14}$ [cm^{-3}] proportional zu $n_L^{-1/2}$, bis auf Werte der Beweglichkeit von 20 [$\text{cm sec}^{-1}/\text{V cm}^{-1}$]. Aus apparativen Gründen konnte nur bis zu n_L -Werten von etwa 10^{16} [cm^{-3}] gemessen werden. Die Ergebnisse decken sich damit mit den aus Wechsellicht-Messungen⁷⁾ und mit den aus Halleffekt-Messungen⁸⁾ ermittelten Werten der Beweglichkeit.

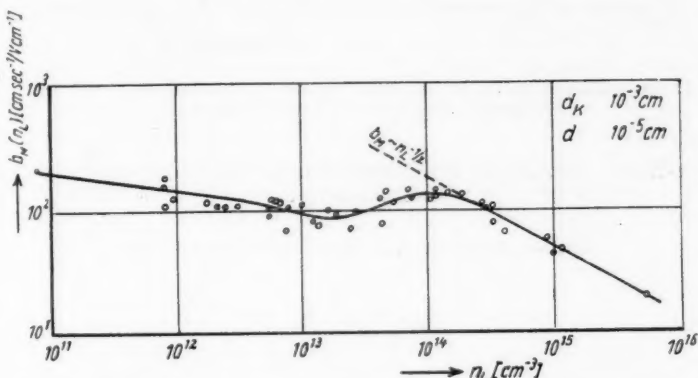


Abb. 1. Beweglichkeit b_H in Abhängigkeit von der Elektronen-Konzentration n_L für 2 CdS-Kristalle

3. Diskussion

Die gemessene Konzentrations-Abhängigkeit der Hall-Beweglichkeit läßt sich befriedigend nicht deuten. Zudem steht die Bestätigung durch weitere Messungen an anderen Kristallen noch aus. Eine mögliche Abhängigkeit der Feldstärke ($\frac{dU}{dx/n}$) oder der Hall-Feldstärke E_H von der Elektronen-Konzentration (nach (7)) läßt schwerlich die Beweglichkeits-Änderung um nahezu den Faktor 10 erklären. Überlegungen von Conwell und Weißkopf¹⁰⁾ ergeben zwar bei hohen Elektronen-

⁷⁾ J. Faßbender u. H. Lehmann, Ann. Physik (6) **6**, 215 (1949).

⁸⁾ L. Gildard und A. W. Ewald, Physic. Rev. **83**, **3**, 359 (1951).

⁹⁾ R. W. Smith, RCA Review, Sept. 1951.

¹⁰⁾ E. Conwell und V. P. Weißkopf, Physic. Rev. **77**, 388 (1950).

Konzentrationen einen dem gemessenen ähnlichen Verlauf (Abb. 2), doch liegt dieser Zusammenhang in einem um Größenordnungen verschiedenen Konzentrations-Bereich.

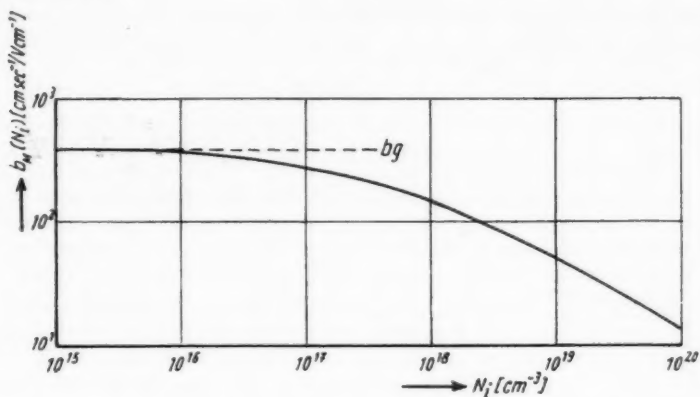


Abb. 2. Beweglichkeit b_M in Abhängigkeit von der Konzentration N_i der ionisierten Störstellen nach Conwell und Weibkopf

Berlin-Buch, Institut für Festkörperforschung der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

(Bei der Redaktion eingegangen am 28. April 1953.)

Damped Oscillations of a Quartz Crystal in Liquids at Different Temperatures

By S. Parthasarathy, Harkrishan Singh and M. Pancholy

(With 10 figures)

Inhaltsübersicht

Nach dem Ausschalten der Erregerspannung, die an eine in Resonanz schwingende Quarzplatte gelegt war, wird das Abklingen des piezoelektrischen Stromes in Benzin und anderen Flüssigkeiten in Abhängigkeit von der Temperatur gemessen, um Viskositätsänderungen bei Ultraschall-Frequenzen zu beobachten. Die Ergebnisse zeigen, daß das Abklingen hauptsächlich von der „shear viscosity“ (normalen Viskosität) der Flüssigkeit abhängt und ihren Temperaturschwankungen folgt. Ähnliche Effekte werden auch bei Verwendung von Benzin beobachtet. Der Absorptionskoeffizient von Benzin nimmt mit steigender Temperatur zu, was auf ein mögliches Anwachsen der „second viscosity“ (des im Ultraschallgebiet zusätzlich auftretenden Viskositätsfaktors) hindeutet. Die vorliegenden Beobachtungen zeigen, daß die Dämpfung des Quarzkristalls mit steigender Temperatur abnimmt, was bedeutet, daß die Dämpfung eine Funktion der normalen Viskosität ist und daß die „second viscosity“, falls sie vorhanden ist, in diesem Fall keinen Einfluß ausübt.

Introduction

From theoretical considerations and experimental data, absorption of sound in liquids α may be taken to be made up of at least three terms as follows:

$$\alpha = \alpha_v + \alpha_H + \alpha_x$$

where α_v is due to viscosity¹⁾, α_H is due to the heat conduction²⁾ and α_x is the absorption of unknown origin operative at high ultrasonic frequencies, and various postulates have been put forward to explain it.

It is well known that in the case of low viscosity liquids the measured value of α is far in excess of α_v and α_H is negligibly small. α_x is generally predominant and determines the overall temperature dependence of absorption coefficient. One explanation of the anomaly is based on the assumption that the viscosity of liquids as ordinarily measured is different from the one encountered in the case of ultrasonic propagation^{3) 4) 5)}. No independent method has so far been used for

¹⁾ G. G. Stokes, Camb. Trans. Phil. Soc. 8, 287 (1845); Math. Phys. Pap. 1, 75 (1880).

²⁾ G. Kirchhoff, Pogg. Ann. 134, 177 (1868).

³⁾ L. Tisza, Physic. Rev. 61, 531 (1942).

⁴⁾ L. Hall, Physic. Rev. 73, 775 (1948).

⁵⁾ C. Eckart, Physic. Rev. 73, 68 (1948).

measuring the value of this second viscosity factor. Values obtained from the above concept show a divergence among themselves^{6) 7)}.

Parthasarathy and Chhapgar⁸⁾ in a recent paper have reported measurement of Q for quartz crystal vibrating in different liquids based on measurement of rate of decay of the piezoelectric current. It has been shown that the value of Q depends on the shear velocity of the medium and that this rule is applicable also to liquids showing higher anomalous absorption.

The present investigation was undertaken with a view to improving the accuracy of measurements by modifying the apparatus and studying the effect of temperature on the measured values.

Theory of the Method

The vibrating quartz is represented by an equivalent electrical circuit of Fig. 1 where C_0 and L correspond to the stiffness and effective mass and C_1 the static capacity. R represents the losses inside the crystal as also loss due to energy

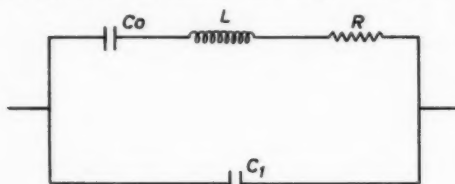


Fig. 1

transfer to the surrounding medium. The factor R , therefore, varies with the medium and also with changing temperature for the same medium.

If the exciting voltage is removed from the quartz, the piezo-electric current generated by the decaying oscillations of the quartz shows a rate of

decrement which is dependent on the nature of the medium. The rate of decrement has been found to be dependent on the viscosity of the liquid. In the present experiment this decrement is studied for some liquids at several temperatures.

Experimental

The experimental set up is a modification of the method used by Brown⁹⁾ for measurement of Q for quartz. Fig. 2 shows in block diagram the general arrangement.

A square wave generator controls a blanking circuit across the coil of a Hartley oscillator. The interrupted CW from the oscillator is amplified and fed to the crystal through a matching network. The oscillator and amplifier are tuned to the resonance frequency of the crystal. The other electrode of the crystal is returned to

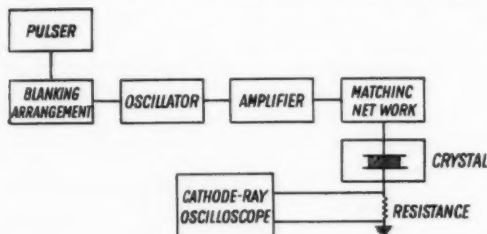


Fig. 2

⁶⁾ L. N. Libermann, Phys. Rev. **74**, 1415 (1949).

⁷⁾ H. Lu, J.A.S.A. **23**, 12 (1951).

⁸⁾ S. Parthasarathy and A. F. Chhapgar, Ann. Physik **12**, 316 (1953).

⁹⁾ H. A. Brown, Proc. I. R. E. **29**, 195 (1941).

the output circuit through a small resistance in series. The voltage across this resistance is applied to the vertical plates of an oscillograph. When the frequency of the oscillator is remote from the crystal resonance the oscillograph shows a practically square pulse, not different from the original square pulse (fig. 3) indicating that the RF current in the circuit dies out without any appreciable lag. When, however, the crystal is in resonance the pattern on the screen changes to one like fig. 4. This pattern is photographed in each case and measurements are later taken of the rate of decrement. This is done by measuring the amplitude at different points separated by known distances. The time interval corresponding to this distance is measured by feeding a sine wave of known frequency without altering the sweep speed.

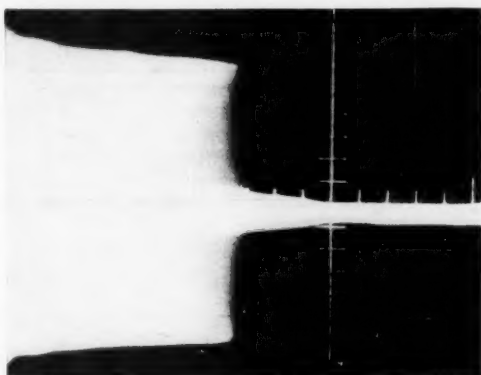


Fig. 3

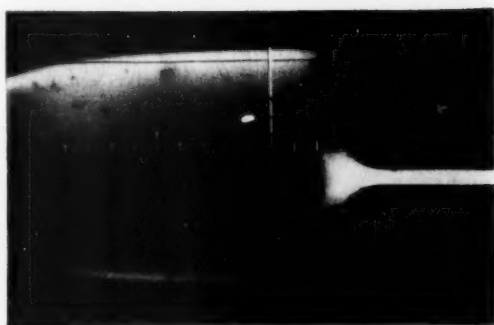


Fig. 4

In the present experiment, the crystal frequency was 3.2 mc/s and the square-wave frequency 300 p. p. s.

The crystal was kept in a small metal specimen container which was immersed in a vacuum thermos bottle. The specimen could be stirred and the temperature read on a thermometer scale capable of reading $1/10^\circ$ C. Since the pattern was photographed with an exposure of 1/25 second variation of temperature during the observation was negligible.

Results and Discussion

Table I shows the measured values of decrement, at different temperatures in various liquids.

The values of δ for benzene are plotted in Fig. 5a against temperature. On the same graph are plotted values of shear viscosity. Variation of classical absorption and observed absorption with temperature is shown in 5b. Figs. 6—10 show the results for methyl iodide, chloroform, CCl_4 , xylene and amyl acetate.

The results obtained with benzene show that the rate of decrement changes with temperature in a way similar to the variation in shear viscosity and classical

absorption, both of which diminish with increasing temperature. Contrary to this, the observed coefficient of absorption increases with rising temperature. Same

Table 1

Liquid	Temperature in °C	Decrement $\delta \cdot 10^3$
Benzene	10	13,58
	20	9,74
	30	8,25
	40	7,71
Methyl Iodide	6	20,90
	10	17,6
	15	13,5
	20	12,4
	25	13,3
	30	12,6
Chloroform	10	9,46
	20	9,08
	30	8,10
	40	7,71
	50	7,56
Carbon tetrachloride	10	11,23
	20	8,01
	30	7,64
	40	7,33
Xylene	10	5,76
	20	5,73
	30	5,48
	40	5,46
	50	5,64
Amyl Acetate	20	5,17
	30	4,86
	40	4,69
	50	4,56

effect is seen in case of methyl iodide. In the case of chloroform, however, the decrement values still follow the variations in shear viscosity, the classical absorption coefficient increases with rising temperature whereas the observed values of α decrease with rising temperature. The effect on the whole is contrary to that of benzene but it still signifies that the overall temperature dependence is determined by the factor responsible for excess absorption.

For CCl_4 and xylene, δ follows the variation in shear viscosity. Data for variation of the observed value of α with temperature are not available.

It is seen that in every case δ is a function of shear viscosity.

On the assumption of second viscosity the absorption of sound in the medium

$$\alpha = (4/3\mu) \omega / \rho_0 v_0^3$$

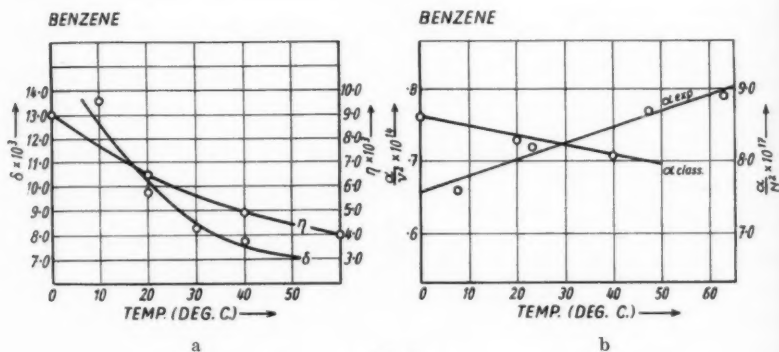


Fig. 5

becomes

$$\alpha = (4/3 \mu + k) \omega / \rho_0 v_0^3$$

where μ is shear viscosity, $\omega = 2\pi f$, ρ_0 is density and v_0 sound velocity.

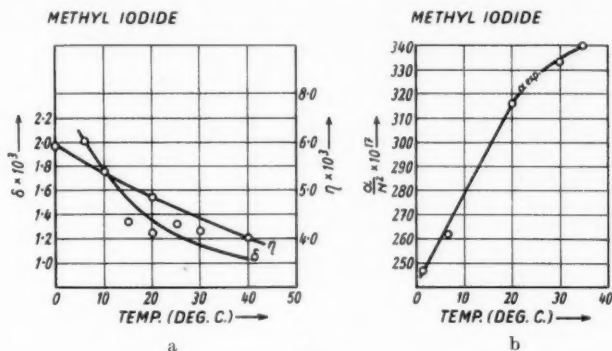


Fig. 6

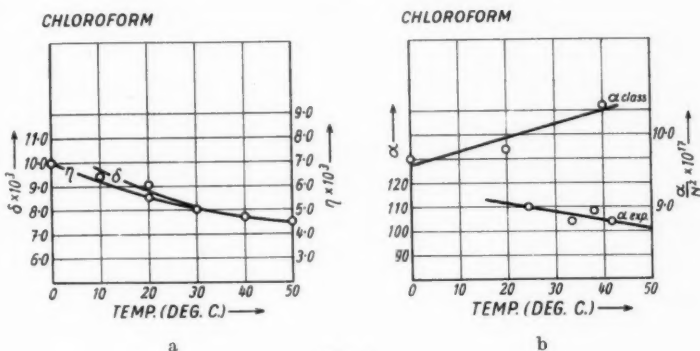


Fig. 7

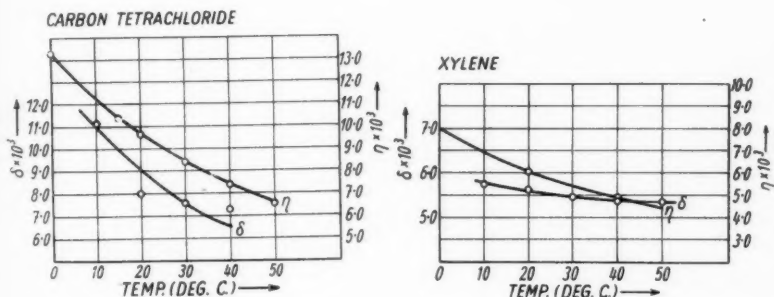


Fig. 8

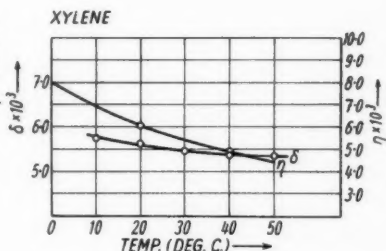


Fig. 9

In effect the second viscosity factor is linearly additive to shear viscosity. The damping of the quartz crystal depends on the shear viscosity. If second viscosity were also operative in the case the overall temperature dependence of damping

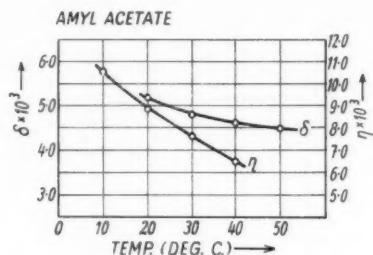


Fig. 10

would be determined by the latter as happens in the case of absorption coefficient. The present results show that the factor governing the temperature dependence of observed values of absorption coefficient is not operative in damping. This may be taken to suggest that the factor responsible for excess absorption is not analogous to viscosity.

New Delhi, National Physical Laboratory of India.

(Bei der Redaktion eingegangen am 4. April 1953.)

Über die Intensitätsverteilung von Spektrallinien im Pérot-Fabry-Interferometer

Von K. Krebs und A. Sauer

(Mit 4 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Es wird die Intensitätsverteilung berechnet, die ein Pérot-Fabry-Interferometer von Spektrallinien mit Dopplerverteilung entwirft. Für verschiedene Dopplerbreiten und Reflexionsvermögen als Parameter werden die Ergebnisse graphisch und in Tabellenform dargestellt.

Die Intensitätsverteilung einer (im Idealfall) streng monochromatischen Spektrallinie im Pérot-Fabry-Interferometer ist bekanntlich¹⁾ — unabhängig von dem speziell gewählten Plattenabstand, und von konstanten Faktoren abgesehen — gegeben durch

$$g(x) = \frac{(1-\varrho)^2}{1 + \varrho^2 - 2\varrho \cos 2\pi x} = \frac{1}{1 + \frac{4\varrho}{(1-\varrho)^2} \sin^2 \pi x}, \quad (1)$$

wobei ϱ das Reflexionsvermögen der Interferometerspiegel bezeichnet und das „Dispersionsgebiet“ sich von $x = n$ bis $x = n + 1$ erstreckt (Abb. 1). Die eigentliche Bedeutung von x ist

$$x = \frac{2d \cos \varphi}{\lambda} \quad (2)$$

(d = Plattenabstand, λ = Wellenlänge, φ = Winkel des zugehörigen Parallelstrahlenbündels mit der optischen Achse des Pérot-Fabry-Interferometers). Im folgenden wird durchweg mit x als Abszisse der Intensitätsverteilung gerechnet; die wahren in der Bildebene des Spektrographen erhaltenen Verteilungen seien also als bereits quadratisch (dem $\cos \varphi$ entsprechend) entzerrt vorausgesetzt.

Die Halbwertsbreite γ der Verteilung (1) errechnet sich — in Bruchteilen des Dispersionsgebietes — zu

$$\gamma = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{(1-\varrho)}{2\sqrt{\varrho}}. \quad (3)$$

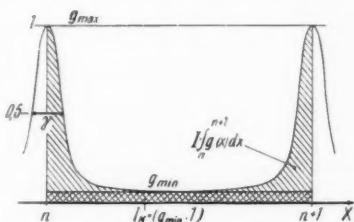


Abb. 1. Intensitätsverteilung im Pérot-Fabry-Interferometer, schematisch

¹⁾ Siehe M. Born, Optik, S. 123 und A. Sommerfeld, Vorlesungen über Theoretische Physik IV, § 7.

Diese Beziehung wird vielfach benutzt, um dann, wenn die wahre Linienbreite klein gegen γ ist, also bei genügend kleinem Etalon, aus experimentellen Werten von γ das Reflexionsvermögen zu ermitteln. Nach (3) ist

$$\varrho = 1 - 2 \sin \frac{\pi \gamma}{2} + 2 \sin^2 \frac{\pi \gamma}{2} - \sin^3 \frac{\pi \gamma}{2} \dots \approx 1 - \pi \gamma + \frac{\pi^2 \gamma^2}{2} \dots \quad (3a)$$

Unebenheiten der Interferometerspiegel, sei es eine konkave oder konvexe Wölbung oder auch unsystematische Fehler der Ebenheit, werden natürlich den Wert γ vergrößern und so ein geringeres „effektives“ Reflexionsvermögen ergeben²⁾.

Bei Benutzung beliebiger Plattenabstände ist nun die Intensitätsverteilung einer Spektrallinie, bzw. der einzelnen Komponente eines strukturierten Linienkomplexes, keineswegs mehr schmal gegenüber der durch (3) gegebenen, üblicherweise kurz „Apparatbreite“ genannten, Halbwertsbreite γ . Sie möge die (symmetrische) Verteilung $f(x)$ besitzen. Die durch „Faltung“ der beiden Verteilungen $g(x)$ und $f(x)$ in der Bildebene des Spektralapparates resultierende Verteilung ist dann³⁾:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) g(x-\xi) d\xi. \quad (4)$$

Anschaulich kann man sich die Entstehung der Faltungsfunktion $F(x)$ so deuten, daß jedes Intervall $f(\xi) d\xi$ der wahren Linienform gemäß der Apparatfunktion $g(x-\xi)$ um ξ herum verteilt wird und die dadurch auf die Stelle x fallenden Beiträge sodann summiert werden.

Faltungsfunktionen, d. h. Integrale des in (4) dargestellten Typus, spielen nicht nur in dem hier behandelten speziellen Fall, sondern in vielen Problemen der physikalischen Meßtechnik eine Rolle. Es sei hier nur daran erinnert, daß auch die durch ein Registrierphotometer erhaltene Aufzeichnung des Schwärzungsverlaufs genau genommen — wegen der endlichen Breite des Abtastspaltes — eine Faltungsfunktion darstellt. Eine eingehende Behandlung solcher „Verzerrungen, die durch die endliche Durchlaßbreite physikalischer Apparate hervorgerufen werden“, wurde von Meyer-Eppler durchgeführt⁴⁾.

Als Linienform $f(\xi)$ sei im folgenden ausschließlich die in der experimentellen Praxis vorherrschende „Dopplerverteilung“ betrachtet. Von Stoß- und Kopplungsverbreiterung darf mit einigem Recht abgesehen werden, da man in der quantitativen Spektroskopie, deren Zielen die vorliegende Betrachtung dienen soll, meistens mit genügend kleinen Dampfdrucken arbeitet, schon um eine Selbstabsorption der Linien zu vermeiden. Deshalb sei auch hier eine „reine“, nicht durch Selbstabsorption modifizierte Dopplerverteilung vorausgesetzt, also eine Verteilung vom Typ

$$f(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{a^2}} = e^{-\frac{4\xi^2}{\mu^2} \ln 2} \quad (5)$$

($\mu = 2a \sqrt{\ln 2}$ — Halbwertsbreite).

²⁾ H. C. Burger u. P. H. van Cittert, Z. Physik **44**, 58 (1927), haben diesen Einfluß rechnerisch näher untersucht. In der Praxis dürfte danach — bei gleicher Halbwertsbreite — eine Unterscheidung zwischen „guten“ Platten mit geringerem Reflexionsvermögen und „fehlerhaften“ mit größerem Reflexionsvermögen im allgemeinen — von Extremfällen abgesehen — kaum möglich sein.

³⁾ M. Born, Optik, § 93, S. 477.

⁴⁾ W. Meyer-Eppler, Ann. Physik **41**, 261 (1942). Ferner auch: Optik **1**, 465 (1946): „Die funktionsanalytische Behandlung des Schattenproblems“, und Arch. elektr. Übertr. **2**, 1 (1948): „Ein Abtastverfahren zur Darstellung von Ausgleichsvorgängen und nichtlinearen Verzerrungen“.

Tabelle 1a^{-b}
Tabelle 1a
Intensitätsverteilung $F^*(x)$ (auf Fläche 1 reduziert) und $q(x)$ (auf Maximalwert 1 reduziert) für verschiedene Parameter γ und μ

γ	μ	$F^*(x)$		$q(x)$									
		$x=0$	0,5	0	0,01	0,02	0,03	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,02 ($q = 93,9\%$)	0,02	22,48	0,0315		0,756	,379	,177	,0597	,0148	,0040	,0021	,0015	,0014
	0,04	15,55	0,0316		,897	,654	,403	,127	,0229	,0060	,0031	,0022	,0021
	0,06	11,76	0,0317	1	,945	,799	,609	,275	,0360	,0080	,0041	,0030	,0027
	0,08	9,437	0,0318		,966	,872	,737	,438	,0667	,0104	,0052	,0037	,0034
	0,12	6,751	0,0322		,984	,936	,863	,666	,2124	,0176	,0077	,0054	,0048
	0,20	4,298	0,0338		,994	,975	,945	,855	,5367	,0968	,0168	,0091	,0079

Tabelle 1b

γ	μ	$F^*(x)$		$q(x)$									
		$x=0$	0,5	0	0,02	0,04	0,06	0,1	0,14	0,2	0,3	0,4	0,5
0,04 ($q = 88,20\%$)	0,02	13,96	0,0626		0,607	,249	,121	,0462	,0245	,0130	,0069	,0050	,0045
	0,04	11,25	0,0624		,757	,380	,178	,0612	,0314	,0164	,0085	,0061	,0055
	0,06	7,79	0,0634	1	,897	,654	,404	,129	,0537	,0252	,0127	,0090	,0081
	0,12	5,90	0,0642		,945	,800	,610	,277	,1098	,0390	,0175	,0122	,0109
	0,2	3,952	0,0674		,977	,913	,815	,571	,3430	,1322	,0338	,0196	,0170
	0,3	2,797	0,0814		,989	,958	,908	,765	,5939	,3528	,1141	,0414	,0291

Tabelle 1c

γ	μ	$F^*(x)$		$q(x)$									
		$x=0$	0,5	0	0,02	0,04	0,06	0,1	0,14	0,2	0,3	0,4	0,5
0,06 ($q = 82,9\%$)	0,03	9,330	0,0942		0,787	,451	,250	,101	,0545	,0289	,0153	,0111	,0101
	0,06	7,525	0,0944		,881	,623	,404	,160	,0726	,0374	,0193	,0143	,0125
	0,12	5,212	0,0961	1	,953	,826	,656	,338	,1574	,0639	,0295	,0206	,0185
	0,18	3,950	0,0997		,975	,905	,800	,547	,3223	,1303	,0460	,0291	,0252
	0,24	3,174	0,1064		,985	,942	,874	,690	,4900	,2515	,0803	,0397	,0335
	0,3	2,653	0,1202		,990	,961	,913	,779	,6159	,3821	,141	,0604	,0453

Tabelle 1d

γ	μ	$F^*(x)$		$q(x)$									
		$x=0$	0,5	0	0,04	0,08	0,12	0,16	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5
0,08 ($\varrho = 77,9\%$)	0,04	7,031	0,125		0,608	,251	,125	,0746	,0505	,0352	,0270	,0184	,0178
	0,08	5,671	0,127		,757	,382	,182	,102	,0666	,0479	,0342	,0247	,0223
	0,16	3,931	0,131	1	,897	,657	,409	,234	,1359	,0796	,0553	,0372	,0332
	0,24	2,983	0,141		,946	,802	,615	,432	,2654	,1654	,1012	,0555	,0472
	0,32	2,402	0,167		,967	,875	,742	,592	,4488	,2998	,1944	,0922	,0696

Tabelle 1e

γ	μ	$F^*(x)$		$q(x)$									
		$x=0$	0,5	0	0,03	0,05	0,1	0,14	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5
0,10 ($\varrho = 73,2\%$)	0,05	5,657	0,155		0,821	,608	,253	,143	,0776	,0543	,0418	,0302	,0275
	0,1	4,563	0,158		,902	,758	,384	,212	,106	,0711	,0536	,0382	,0346
	0,2	3,167	0,167	1	,962	,898	,659	,457	,239	,1423	,0948	,0601	,0528
	0,3	2,408	0,194		,980	,946	,804	,656	,438	,2931	,1940	,1010	,0806
	0,4	1,943	0,277		,988	,967	,876	,774	,599	,4580	,3391	,1880	,1426

Tabelle 1f

γ	μ	$F^*(x)$		$q(x)$									
		$x=0$	0,5	0	0,03	0,05	0,1	0,14	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5
0,12 ($\varrho = 68,9\%$)	0,06	4,746	0,185		0,870	,697	,336	,190	,110	,0769	,0592	,0431	,0390
	0,12	3,829	0,189		,931	,823	,495	,300	,155	,1032	,0773	,0548	,0493
	0,18	3,150	0,196	1	,959	,894	,644	,444	,232	,1490	,1104	,0701	,0621
	0,24	2,662	0,208		,973	,929	,747	,575	,350	,2250	,1525	,0906	,0781
	0,36	2,029	0,272		,986	,963	,861	,747	,562	,4192	,3050	,1710	,1340

Tabelle 1g

Tabelle 1g

λ	μ	$F^*(x)$		$q(x)$									
		$x=0$	0,5	0	0,06	0,12	0,18	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
$(\bar{v} = 68,9\%)$	0,16	3,100	0,196		0,959	0,894	0,844	0,792	0,744	0,692	0,644	0,597	0,557
	0,24	2,662	0,208		0,973	0,929	0,881	0,831	0,777	0,725	0,675	0,625	0,575
	0,32	2,039	0,272		0,986	0,963	0,941	0,919	0,897	0,875	0,853	0,831	0,809
	0,40												
$(\bar{v} = 64,9\%)$	0,07	4,100	0,216		0,684	0,325	0,172	0,103	0,0792	0,0657	0,0579	0,0537	0,0527
	0,14	3,309	0,221		0,803	0,480	0,256	0,142	0,1054	0,0854	0,0743	0,0684	0,0667
	0,24	2,528	0,239	1	0,906	0,682	0,451	0,254	0,1765	0,1327	0,1094	0,0980	0,0946
	0,32	2,118	0,275		0,959	0,781	0,585	0,380	0,2739	0,2024	0,1593	0,1368	0,1300
	0,40	1,823	0,349		0,958	0,844	0,688	0,501	0,3873	0,2989	0,2380	0,2029	0,1915

Tabelle 1h

λ	μ	$F^*(x)$		$q(x)$									
		$x=0$	0,5	0	0,08	0,14	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
$(\bar{v} = 61,1\%)$	0,08	3,618	0,244		0,609	0,316	0,184	0,131	0,102	0,0844	0,0744	0,0692	0,0676
	0,16	2,921	0,253		0,760	0,471	0,274	0,186	0,138	0,1114	0,0965	0,0889	0,0866
	0,24	2,407	0,271	1	0,851	0,623	0,410	0,283	0,199	0,1552	0,1331	0,1165	0,1126
	0,32	2,040	0,309		0,901	0,732	0,543	0,406	0,300	0,2272	0,1824	0,1587	0,1514
	0,40	1,770	0,383		0,930	0,804	0,649	0,522	0,411	0,3235	0,2629	0,2277	0,2162

Streng genommen kann auch eine solche Dopplerverteilung niemals rein auftreten, sondern wird ebenfalls, infolge der natürlichen Dämpfungsbreite der Spektrallinien durch eine Faltungsfunktion (4) dargestellt, wobei für $f(\xi)$ die Dopplerverteilung und für $g(\xi)$ die bekannte „Dispersionsverteilung“

$$g(\xi) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2\xi}{\delta}\right)^2} \quad (6)$$

zu setzen ist. (δ bedeutet darin die natürliche, durch Strahlungsdämpfung bestimmte Halbwertsbreite.) Diese Faltung zwischen Doppler- und Dispersionsverteilung wurde von Born⁵⁾ berechnet und für verschiedene Verhältnisse der Doppler- und natürlichen Halbwertsbreite numerisch und graphisch dargestellt.

In der experimentellen Praxis ist jedoch die Dopplerbreite im allgemeinen sehr groß gegenüber der natürlichen Linienbreite, so daß die resultierende Faltungsfunktion praktisch gleich der Dopplerverteilung ist⁶⁾.

Die Faltung einer Dopplerverteilung mit der Appa-

⁵⁾ M. Born, Optik, § 93.

⁶⁾ Weit außerhalb der Linienmitte geht allerdings — wegen des starken Exponentialabfalls der Dopplerverteilung — die Faltungsfunktion in die sehr viel schwächer abklingende Dispersionsverteilung über (auch wenn deren Halbwertsbreite klein gegenüber der Dopplerbreite ist), eine Tatsache, die von Minkowski, Z. Physik 36, 839 (1926), benutzt wurde, um aus Dispersionsmessungen weit außerhalb der Linienmitte die natürliche Linienbreite der Na-D-Linien, bzw. die Lebensdauer der zugehörigen Anregungszustände, zu bestimmen.

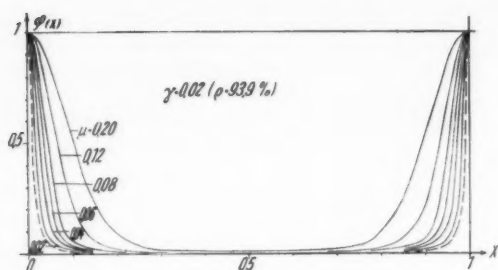


Abb. 2a

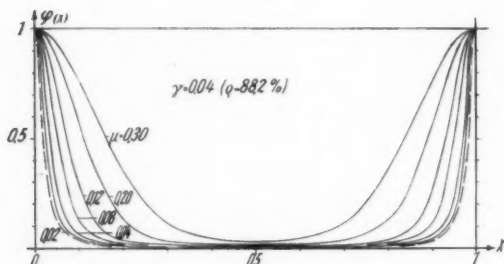


Abb. 2b

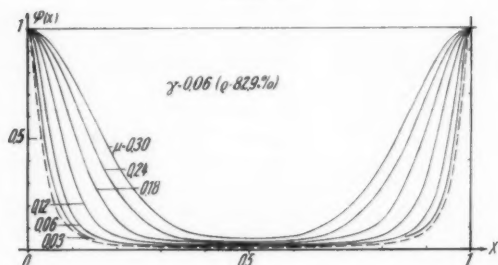


Abb. 2c

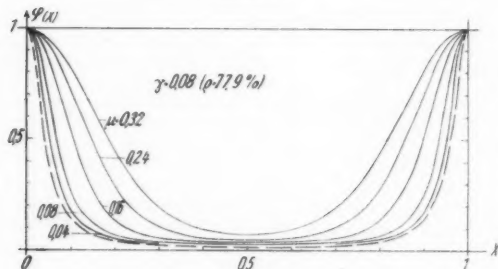


Abb. 2d

ratverteilung eines Pérot-Fabry-Interferometers ist unseres Wissens noch nicht vollständig berechnet worden. Burger und van Cittert benutzen die Tatsache, daß man für die Nähe der Linienmitte im zweiten Teil der Gl. (1) $\sin^2 x\pi$ durch $x^2\pi^2$ ersetzen kann, und berechneten den Zusammenhang zwischen Doppler-, Apparatbreite und der Halbwertsbreite der resultierenden Faltungsfunktion⁷⁾, und für viele Zwecke der Interferenzspektroskopie reicht die Kenntnis dieses Zusammenhanges völlig aus. Für manche quantitativen Arbeiten, insbesondere bei der Bestimmung von Intensitätsverhältnissen sehr verschieden starker Linien, ist es aber doch bisweilen nützlich, den von den verschiedenen Linien auslaufenden Intensitätsuntergrund genauer erfassen zu können.

Nun läßt sich zwar für die reine Apparatverteilung (einer ideal monochromatischen Linie) das Verhältnis der Minimal- zur Maximalintensität $g_{\min} : g_{\max}$ (Abb. 1) leicht exakt berechnen⁸⁾ zu

$$g_{\min} : g_{\max} = \frac{(1 - \varrho)^2}{(1 + \varrho)^2}, \quad (7)$$

⁷⁾ H. C. Burger u. P. H. van Cittert s. ob. Ihre Ergebnisse wurden zum Teil von R. Minkowski u. H. Bruck, Z. Physik **95**, 299 (1935) berichtigt.

⁸⁾ Siehe z. B. Tolansky, High Resolution Spectroscopy, 1947, sowie M. Krause, Dipl.-Arbeit Göttingen 1950.

ebenso das Verhältnis der Intensitätsintegrale $I_k : I$

$$\equiv (g_{\min} \cdot 1) : \int_0^1 g(x) dx, \text{ d. h.}$$

des kontinuierlichen Untergrundes zur Gesamtintensität, zu

$$I_k : I = \frac{(1 - \varrho)}{(1 + \varrho)}. \quad (8)$$

Jedoch ist für Linien mit einer endlichen, z. B. Dopplerverteilung diese Berechnung nicht geschlossen durchführbar. Man sieht leicht ein, daß der Ausdruck (7) sehr stark von der Intensitätsverteilung abhängen und bei einer mehrteiligen Struktur ganz unbrauchbar werden muß, während der Ausdruck (8) weitgehend davon unabhängig ist. Daher kann die Beziehung (8) dazu benutzt werden, um bei dem Intensitätsvergleich mehrerer Komponenten aus der ermittelten integralen Gesamtintensität I den gesamten kontinuierlichen Untergrund I_k abzutrennen, wie es z. B. von Steudel⁹⁾ bei der Bestimmung des Kernspins von Pd 105 durchgeführt wurde.

Allerdings könnte bei größeren Dopplerbreiten, insbesondere beim Arbeiten im Blauen oder UV, wo

⁹⁾ A. Steudel, Z. Physik **132**, 429 (1952).

Abb. 2a—h. Intensitätsverteilung $\varphi(x)$ für verschiedene Parameter γ und μ . Gestrichelte Kurven ($\mu = 0$) nach (1) berechnet

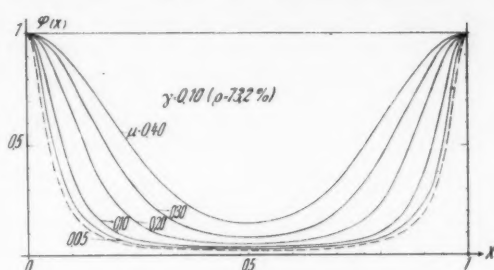


Abb. 2e

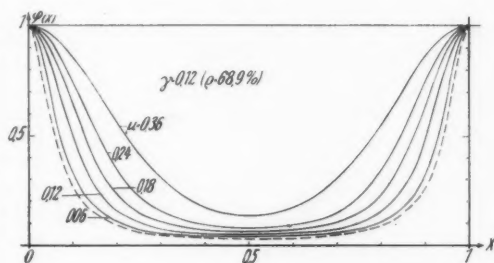


Abb. 2f

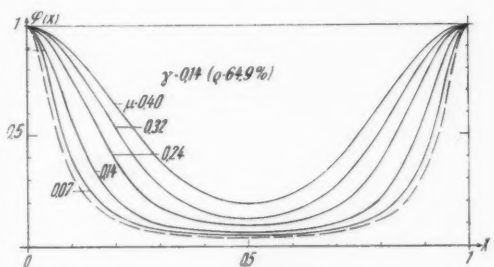


Abb. 2g

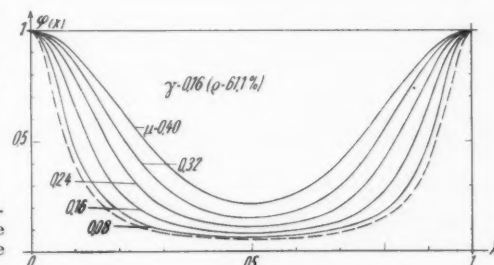


Abb. 2h

man infolge der geringeren Reflexionsvermögen mit größeren Werten γ zu rechnen hat, die Anwendung der einfachen Beziehung (8) einen gewissen Fehler verursachen.

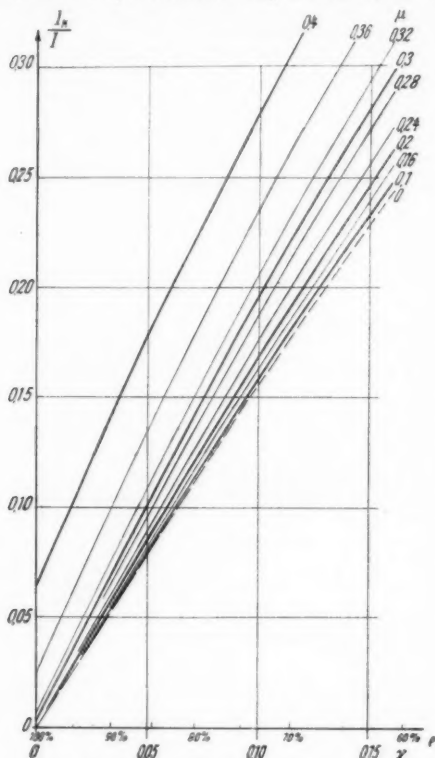


Abb. 3. I_0/I als Funktion der Apparaturbreite γ , bzw. des Reflexionsvermögens ϱ . (Werte für $\gamma = 0$ aus der reinen Dopplerverteilung, Kurve für $\mu = 0$ nach (8) berechnet)

Anschaulich sieht man leicht an Hand der Abb. 1 ein, daß dies dann der Fall sein wird, wenn $F(x)$ bei $x = 0,5$ durch die von der Dopplerbreite herrührenden Ausläufer schon merklich angehoben wird.

Um diesen Punkt zu klären, und im Hinblick auf quantitative Auswertungen von Pérot-Fabry-Aufnahmen auch bei größeren Doppler- und Apparaturbreiten, haben wir es unternommen, die resultierende Linienform für das ganze Dispersionsgebiet zu berechnen. Zwar wäre die oben erwähnte Bornsche Berechnung der Faltung von Doppler- und Dispersionsverteilung durchaus für die Linienmitte der Apparat-Verteilung zu verwenden, da diese nach Gl. (1) für kleine Werte x in eine „Dispersionsverteilung“ übergeht; doch für das gerade hier interessierende Übergangsgebiet zwischen den Ordnungen ist eine besondere Berechnung nötig.

Es handelt sich dabei also darum, die durch (4) definierte Faltungsfunktion zu berechnen, indem für $f(\xi)$ der Ausdruck (5) und für $g(x - \xi)$ der Ausdruck (1) eingesetzt wird.

Die Lösung des Integrals (4) erfolgt dadurch, daß $g(\xi)$ in eine Fourier-Reihe entwickelt wird:

$$g(\xi) = \frac{(1 - \varrho)^2}{1 + \varrho^2 - 2\varrho \cos 2\pi\xi} = \frac{(1 - \varrho)}{(1 + \varrho)} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varrho^n \cos 2\pi n \xi \right]. \quad (9)$$

Dies ergibt für $F(x)$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{(1 - \varrho)}{(1 + \varrho)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{a^2}} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varrho^n \cos 2\pi n (x - \xi) \right] d\xi \\ &= \frac{(1 - \varrho)}{(1 + \varrho)} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{a^2}} d\xi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varrho^n \cos 2\pi n x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{a^2}} \cos 2\pi n \xi d\xi \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varrho^n \sin 2\pi n x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{a^2}} \sin 2\pi n \xi d\xi \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Das dritte Integral ist wegen der sin-Funktion stets = 0, das zweite ist geschlossen lösbar und ergibt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{a^2}} \cos 2\pi n \xi d\xi = a \sqrt{\pi} e^{-a^2 \pi^2 n^2}, \quad (11)$$

das erste, als Spezialfall ($n = 0$) des zweiten, ist $= a \sqrt{\pi}$.

Als Endresultat ergibt sich also:

$$F(x) = \frac{(1-\varrho)}{(1+\varrho)} a \sqrt{\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varrho^n e^{-a^2 \pi^2 n^2} \cos 2\pi n x \right]. \quad (12)$$

Soll nun $F(x)$ mit einem Faktor k so versehen werden, daß $k \int_0^1 F(x) dx = I = 1$ ist, so ist zu berücksichtigen, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{a^2}} d\xi = a \sqrt{\pi} \quad (13a)$$

und

$$\int_0^1 g(\xi) d\xi = \int_0^1 \frac{(1-\varrho)^2}{1+\varrho^2-2\varrho \cos 2\pi \xi} d\xi = \frac{(1-\varrho)}{(1+\varrho)} \quad (13b)$$

und infolgedessen, wie aus der Theorie der Faltungsintegrale bekannt,

$$\int_0^1 F(x) dx = a \sqrt{\pi} \frac{(1-\varrho)}{(1+\varrho)}. \quad (14)$$

Die auf Fläche 1 (eines Dispersionsgebietes) reduzierte Funktion $k \cdot F \equiv F^*$ ist demnach, wenn man außerdem nach (5) a durch $\mu/2\sqrt{\ln 2}$ ersetzt,

$$F^*(x) = \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varrho^n e^{-\frac{\mu^2 \pi^2 n^2}{4 \ln^2 2}} \cos 2\pi n x \right]. \quad (15)$$

Soll diese Verteilungsfunktion, wie meistens üblich, auf den Maximalwert 1 reduziert werden, so ist zu bilden

$$\frac{F^*(x)}{F^*(0)} = \varphi(x). \quad (16)$$

Mit der Reihe (15), die — von den kleinsten μ -Werten abgesehen — sehr gut konvergiert, wurden die Funktionen $F^*(x)$ und $\varphi(x)$ berechnet¹⁰⁾, wobei ϱ so gewählt wurde, daß die nach (3) zugehörigen Werte $\gamma = 2, 4 \dots 16\%$ betrugen. μ und γ sind wie x stets als Bruchteil des Dispersionsgebietes angegeben.

Die Ergebnisse sind in den Tabellen 1a—h zusammengestellt und in Abb. 2a—h veranschaulicht¹¹⁾. Von den Werten $F^*(x)$ sind nur die wichtigsten $F^*(0)$

¹⁰⁾ Den Herren cand. ing. W. Meissner und cand. ing. H. Lorenz haben wir dabei für die Durchführung der zahlreichen Rechnungen zu danken.

¹¹⁾ Es sei erwähnt, daß die nach Minkowski und Bruck [Z. Physik 95, 299 (1935)] aus γ und μ berechneten Halbwertsbreiten der resultierenden Verteilung sich praktisch fehlerlos in die berechneten Kurven einfügen.

und $F^*(0,5)$ angegeben, da man nach (16) jeden anderen Wert zu $F^*(x) = F^*(0) \varphi(x)$ erhalten kann. Durch graphische Interpolation lassen sich nach diesen Angaben leicht Kurven für beliebige andere Werte γ, μ konstruieren.

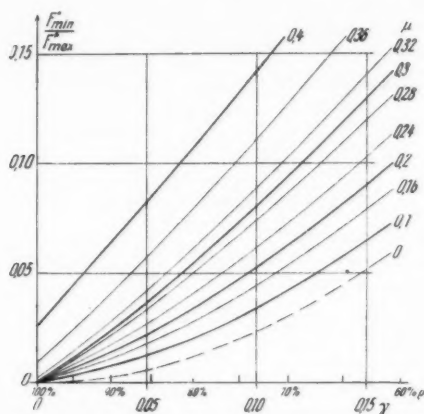


Abb. 4. F_{\min}^*/F_{\max}^* als Funktion der Apparatreite γ , bzw. des Reflexionsvermögens μ . (Werte für $\gamma = 0$ aus der reinen Dopplerverteilung, Kurve für $\mu = 0$ nach (7) berechnet)

Die für die Abtrennung eines kontinuierlichen Untergrundes interessierenden Werte $I_k:I$ sind wegen $\int F^* dx = 1$ durch $F^*(0,5)$ gegeben und in der Abb. 3 nochmals gesondert in Abhängigkeit von γ und mit μ als Parameter dargestellt. Man erkennt, daß für höhere Werte von γ und μ Abweichungen von dem Idealfall streng monochromatischer Linien ($\mu = 0$, gestrichelt) auftreten, die bei quantitativen Auswertungen bisweilen von Einfluß auf die Ergebnisse sein können. In der Abb. 4 sind in derselben Weise die Werte $F_{\min}^*:F_{\max}^*$ dargestellt, die in den Tabellen als $\varphi(0,5)$ enthalten sind.

Berlin, Physikalisches Institut der Technischen Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 24. Juli 1953.)

Zur zweiten störungstheoretischen Näherung der Meson-Nukleon-Streuung¹⁾

Von G. P. Weber

(Mit 4 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Die Beiträge der zweiten störungstheoretischen Näherung zum differentiellen Wirkungsquerschnitt der π -Meson-Nukleon-Streuung werden in einer geladenen, pseudoskalaren Mesontheorie mit pseudoskalarer Kopplung für den Fall verschwindender Mesonmasse in ihrer gesamten Energieabhängigkeit ermittelt. Im Falle der genauen Vorwärtsstreuung wird der durch das Nullsetzen der Mesonmasse hervorgerufene Fehler abgeschätzt. Für extrem relativistische Energiewerte wird der totale Wirkungsquerschnitt berechnet.

1. Einleitung

Um festzustellen, was man in der Feldtheorie für Mesonen mit der störungstheoretischen Methode der Entwicklung nach Potenzen der Kopplungskonstante g erreichen kann, ist es notwendig, einfache Prozesse zu untersuchen. Die Meson-Nukleon-Streuung erscheint hierfür geeignet und ist schon mehrfach Gegenstand theoretischer Untersuchungen gewesen. Corinaldesi und Field²⁾ berechneten die g^4 - und g^6 -Näherung des differentiellen und des totalen Wirkungsquerschnittes für den extrem nichtrelativistischen Grenzfall und für Energien, die noch in der Größenordnung der Mesonruhenenergie liegen und klein gegen die Nukleonruhenenergie sind. Differentieller und totaler Wirkungsquerschnitt in g^4 -Näherung wurden von Peshkin³⁾ für skalare und pseudoskalare Mesonen untersucht. Seine Ergebnisse stimmen mit denen von Ashkin, Simon und Marshak⁴⁾ überein, die in ihrer sehr ausführlichen Arbeit auch die g^6 -Näherung nach der Feynmanschen⁵⁾ Methode behandelten, aber wegen rechnerischer Schwierigkeiten nur die Korrektur für den extrem nichtrelativistischen Grenzfall ermittelten. Für mittlere und hohe Energien kann die Korrektur in Strenge nur durch äußerst umfangreiche numerische Rechnungen gewonnen werden. Um wenigstens einen groben Überblick über die Energieabhängigkeit der g^6 -Näherung zu bekommen, wird in der vorliegenden Arbeit die Mesonmasse verschwindend klein angenommen. In diesem Falle lassen sich die Rechnungen in geschlossener Form bewältigen. Im extrem nichtrelativisti-

¹⁾ Auszug aus der Jenaer Dissertation (1953) des Verf.

²⁾ E. Corinaldesi u. G. Field, *Philos. Mag.* **40**, 1159 (1949); **41**, 364 (1950).

³⁾ M. Peshkin, *Physic. Rev.* **81**, 425 (1951).

⁴⁾ J. Ashkin, A. Simon u. R. E. Marshak, *Prog. Theor. Phys.* **4**, 634 (1950).

⁵⁾ R. P. Feynman, *Physic. Rev.* **76**, 749 (1949); **76**, 769 (1949); **84**, 108 (1951).

stischen Grenzfall kann man durch Vergleich mit den Ergebnissen von Ashkin, Simon und Marshak⁴⁾ den durch diese Näherung bewirkten Fehler direkt bestimmen. Eine Betrachtung des totalen Wirkungsquerschnittes der g^4 -Ordnung zeigt, daß die Näherung, die Mesonmasse als klein anzusehen, im extrem relativistischen Fall recht gut ist.

2. Bezeichnungen

Es werden natürliche Einheiten ($\hbar = c = 1$) verwandt, und es wird die Koppelkonstante g in konventionellen Einheiten angegeben, so daß der Feinstrukturkonstanten die dimensionslose Größe g^2 entspricht. Wir schließen uns der Feynmanschen⁵⁾ Bezeichnungsweise an wie in den zitierten Arbeiten^{3) 4)} über diesen Gegenstand. Das skalare Produkt zweier Vierervektoren schreiben wir $a b = a_\mu b_\mu = a_4 b_4 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$. Für ein freies Nukleon mit dem Energie-Impuls-Vierervektor p und der Masse M (den Massenunterschied zwischen Proton und Neutron vernachlässigen wir) soll die Dirac-Gleichung in der Form gelten: $\mathfrak{P} u = M u$ oder $\bar{u} \mathfrak{P} = M \bar{u}$, wo \bar{u} der zu u adjungierte Spinor ist. $\mathfrak{P} = p_\mu \gamma_\mu$ ist eine Zusammenfassung von Energie-Impuls-Vierervektor und γ -Matrizen nach dem oben definierten skalaren Produkt zu einem einheitlichen Dirac-Operator. Für zwei solche Operatoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} gilt die Vertauschungsregel $\mathfrak{A} \mathfrak{B} + \mathfrak{B} \mathfrak{A} = 2 a b$. Die Spinoren normieren wir so, daß $\bar{u} u = 1$ ist, was verlangt, daß wir später bei Aufstellung des differentiellen Wirkungsquerschnittes noch einen bestimmten Faktor N_0 anbringen müssen. Die bei Bildung des Pseudoskalars aus den Spinoren notwendige Matrix $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ antikommutiert mit den Dirac-Operatoren \mathfrak{A} , und es gilt $\gamma_5^2 = -1$. Da in unserem Maßsystem Masse, Impuls und Energie dieselbe Dimension haben, wollen wir alle diese Größen in Einheiten der Nukleonmasse messen ($M = 1$).

Die Masse der π -Mesonen, die wir später Null setzen, sei mit δ bezeichnet. Wenn die Energie-Impuls-Vierervektoren des Nukleons vor und nach der Streuung $p = (E, \mathbf{p})$ und $p' = (E', \mathbf{p}')$, die des Mesons $q = (\omega, \mathbf{q})$ und $q' = (\omega', \mathbf{q}')$ sind, so können wir den Energie-Impuls-Satz für unseren Prozeß schreiben $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} = \mathfrak{P}' + \mathfrak{Q}'$ und die Dispersionsbeziehungen $\mathfrak{P}^2 = \mathfrak{P}'^2 = 1$ und $\mathfrak{Q}^2 = \mathfrak{Q}'^2 = \delta^2$. Es wird ausschließlich im Laboratoriumssystem gerechnet, in dem das Nukleon anfangs ruht ($\mathbf{p} = 0$). Es ist nützlich, für folgende Invarianten Abkürzungen einzuführen:

$$\begin{aligned} \kappa' &= -(2 p q + \delta^2) = -(2 p' q' + \delta^2) = -(2 \omega + \delta^2) \\ \tau' &= (2 p q' - \delta^2) = (2 p' q - \delta^2) = (2 \omega' - \delta^2), \end{aligned}$$

die im Falle $\delta^2 = 0$ in die von Brown und Feynman⁶⁾ bei der Berechnung der ϵ^6 -Näherung des Compton-Effektes verwandten Abkürzungen κ und τ übergehen. Das Integrationselement $d^4 k$ bedeutet $dk_1 dk_2 dk_3 dk_4$, so daß

$$\int d^4 k = \int \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 \text{ ist.}$$

3. Aufstellung der Matricelemente

In unserer rein feldtheoretischen Betrachtungsweise beschreiben wir die π -Mesonen durch ein pseudoskalarfeld, komplexes Feld, das in pseudoskalarer Weise mit dem Spinorfeld der Nukleonen gekoppelt ist. Es werden nur geladene Mesonen betrachtet.

⁶⁾ L. M. Brown u. R. P. Feynman, *Physic. Rev.* **85**, 231 (1952).

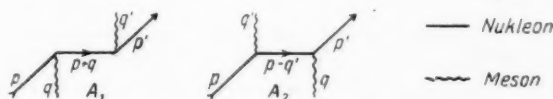
Den Streuproblemen ist die Rechnung im Impulsraum am besten angepaßt. Man hat die in jeder Näherung möglichen Graphen aufzustellen und kann nach den Regeln von Feynman⁶⁾-Dyson⁷⁾ unmittelbar das S -Matrixelement im Impulsraum hinschreiben.

Für die Streuung von geladenen Mesonen (π^+ und π^-) an Proton (P) oder Neutron (N) gibt es vier mögliche Prozesse, die man in zwei Gruppen zusammenfassen kann, je nachdem zuerst die Absorption des Anfangsmesons erfolgen kann oder zuerst das Endmeson emittiert werden muß:

$$\pi^- + P \rightarrow \pi^- + P \text{ oder } \pi^+ + N \rightarrow \pi^+ + N \quad (I)$$

$$\pi^- + N \rightarrow \pi^- + N \text{ oder } \pi^+ + P \rightarrow \pi^+ + P. \quad (II)$$

Die erste Gruppe gehört zu dem Graphen A_1 der Abb. 1, die zweite zu A_2 .


Abb. 1. Graphen zum g^2 -Matrixelement

Die zu den Grundgraphen der Abb. 1 gehörigen Matrixelemente ($\sim g^2$) lauten:

$$S_{A_1}(g^2) = -i \frac{2\pi}{\sqrt{\omega\omega'}} g^2 \bar{u}' \gamma_5 (\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} - 1)^{-1} \gamma_5 u \quad (1)$$

$$S_{A_2}(g^2) = -i \frac{2\pi}{\sqrt{\omega\omega'}} g^2 \bar{u}' \gamma_5 (\mathfrak{P} - \mathfrak{Q}' - 1)^{-1} \gamma_5 u. \quad (2)$$

Mit Hilfe der Abkürzungen

$$\tilde{\mathfrak{P}} = \begin{cases} \tilde{\mathfrak{P}}_1 = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q} \text{ für Prozeßgruppe (I)} \\ \tilde{\mathfrak{P}}_2 = \mathfrak{P} - \mathfrak{Q}' \text{ für Prozeßgruppe (II)} \end{cases} \quad \text{und} \quad \alpha' = \begin{cases} \alpha'_1 = \alpha' \text{ für (I)} \\ \alpha'_2 = \alpha' \text{ für (II)} \end{cases} \quad (3)$$

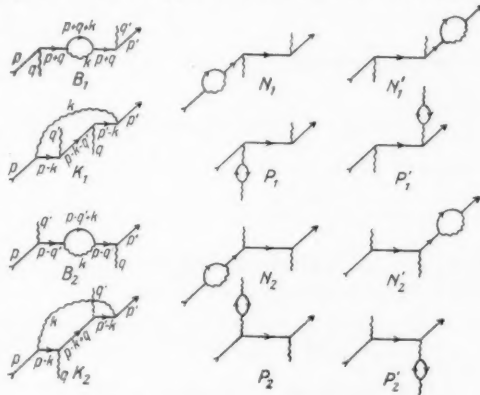
kann man die weitere Rechnung für beide Gruppen zusammenfassen. Wir setzen

$$(\tilde{\mathfrak{P}} - 1)^{-1} = \frac{\tilde{\mathfrak{P}} + 1}{\tilde{\mathfrak{P}}^2 - 1} = \frac{\tilde{\mathfrak{P}} + 1}{- \alpha'}$$

ein und ziehen γ_5 durch, dann lauten die Matrixelemente:

$$S_A(g^2) = i g^2 \frac{2\pi}{\sqrt{\omega\omega'} \alpha'} \bar{u}' (\tilde{\mathfrak{P}} - 1) u. \quad (4)$$

Das Matrixelement der zweiten Näherung für die Streuprozesse ist von der Ordnung g^4 . In der betrachteten Theorie mit nur ge-


Abb. 2. Graphen zum g^4 -Matrixelement

⁷⁾ F. J. Dyson, Physic. Rev. **75**, 486 (1949); **75**, 1736 (1949).

ladenen Mesonen, die neutrale Mesonen (π^0) auch in den virtuellen Zuständen ausschließt, sind folgende Graphen der zweiten Näherung auszuwerten (Abb. 2).

Die Graphen B , N , N' , P , P' enthalten sogenannte primitiv-divergente Teile, während die Graphen K konvergent sind. Nach den Renormierungsmethoden von Dyson⁷⁾ und Matthews⁸⁾ geben nur die B - und K -Graphen endliche Beiträge zum g^4 -Matrixelement:

$$S(g^4) = S_B^c + S_K. \quad (5)$$

S_B^c ist der Beitrag von B nach der Renormierung; vorher lautet dieser Term:

$$S_B = -i g^4 \frac{2\pi}{V \omega \omega'} \bar{u}' \gamma_5 (\tilde{\mathfrak{P}} - 1)^{-1} \gamma_5 \mathfrak{D} \gamma_5 (\tilde{\mathfrak{P}} - 1)^{-1} \gamma_5 u. \quad (6)$$

Hier ist

$$\mathfrak{D} = i (4\pi^3)^{-1} \int d^4k (\tilde{\mathfrak{P}} - \mathfrak{K} - 1)^{-1} (\mathfrak{K}^2 - \delta^2)^{-1} \quad (7)$$

der divergente Teil, dessen endlicher Beitrag \mathfrak{D}^c durch Abtrennung der Renormierungsterme für Masse und Ladung des Nukleons eindeutig zu ermitteln ist.

Bevor wir $\tilde{\mathfrak{D}} = \gamma_5 \mathfrak{D} \gamma_5$ nach Dyson⁷⁾ renormieren, führen wir nach Feynman⁹⁾ einen Konvergenzfaktor $C(\mathfrak{K}^2 - \delta^2)$ in (7) ein:

$$\tilde{\mathfrak{D}} = i (4\pi^3)^{-1} \gamma_5 \int d^4k (\tilde{\mathfrak{P}} - \mathfrak{K} - 1)^{-1} \gamma_5 (\mathfrak{K}^2 - \delta^2)^{-1} C(\mathfrak{K}^2 - \delta^2). \quad (8)$$

$C(\mathfrak{K}^2 - \delta^2)$ ist definiert durch

$$(\mathfrak{K}^2 - \delta^2)^{-1} C(\mathfrak{K}^2 - \delta^2) = (\mathfrak{K}^2 - \delta^2)^{-1} - (\mathfrak{K}^2 - \lambda^2)^{-1} = - \int_{\delta^2}^{\lambda^2} dL (\mathfrak{K}^2 - L)^{-2}. \quad (9)$$

Nach Ausführung der L -Integration wird $\lambda \rightarrow \infty$ gehen lassen. Die Einführung von $C(\mathfrak{K}^2 - \delta^2)$ bedeutet die Benutzung eines Hilfsmesonfeldes mit der großen Masse λ zur Regularisierung in formaler Hinsicht. Man kann auf diese Weise alle über den Vierervektor k eines virtuellen Mesons zu erstreckenden divergenten Integrale konvergent machen, was für das Arbeiten mit diesen Ausdrücken vorteilhaft ist.

(8) erhält dann die Form

$$\tilde{\mathfrak{D}} = -i (4\pi^3)^{-1} \int_{\delta^2}^{\lambda^2} dL \int d^4k \frac{\tilde{\mathfrak{P}} - \mathfrak{K} - 1}{(\tilde{\mathfrak{P}} - \mathfrak{K})^2 - 1} \frac{1}{(\mathfrak{K}^2 - L)^2}. \quad (8')$$

Die beiden Faktoren im Nenner von (8') setzen wir nach Feynman⁹⁾ mit Hilfe

der Formel $\frac{1}{a^2 b} = 2 \int_0^1 \frac{x dx}{[ax + b(1-x)]^3}$ zusammen, und nach kurzer Umrechnung folgt mit den Abkürzungen $Q_\mu = \tilde{p}_\mu(1-x)$ und $\Delta = Lx + \tilde{p}^2(1-x)^2 - (\tilde{p}^2 - 1)(1-x)$

$$\tilde{\mathfrak{D}} = - (4\pi^3)^{-1} 2 i \int_0^1 x dx \int_{\delta^2}^{\lambda^2} dL \int d^4k \frac{\tilde{\mathfrak{P}} - \mathfrak{K} - 1}{[(k_\mu - Q_\mu)^2 - \Delta]^3}. \quad (8'')$$

Nach der Verschiebung $k_\mu \rightarrow k_\mu + Q_\mu$ und nach Ausführung der Integration über k unter Verwendung der Formeln

$$\int \frac{d^4k}{[k^2 - \Delta]^3} = \frac{4\pi^2}{8i\Delta}, \quad \int d^4k \frac{\mathfrak{K}}{[k^2 - \Delta]^3} = 0 \text{ (nach Feynman⁹⁾)}$$

⁹⁾ P. T. Matthews, Philos. Mag. **41**, 185 (1950); Physic. Rev. **80**, 293 (1950); P. T. Matthews u. A. Salam, Rev. mod. Physics **23**, 311 (1951).

erhält man

$$\tilde{\mathfrak{D}} = - (4\pi)^{-1} \int_0^1 x dx \int_{\delta^2}^{\lambda^2} dL \frac{\tilde{\mathfrak{P}} x - L}{L}. \quad (8''')$$

Nach Dyson hat man (8''') zu zerlegen in $\tilde{\mathfrak{D}}^o + \tilde{\mathfrak{D}}^e$, wobei $\tilde{\mathfrak{D}}^o$ und $\tilde{\mathfrak{D}}^e$ in folgender Form erscheinen:

$$\tilde{\mathfrak{D}}^o = c_1 + c_2 (\tilde{\mathfrak{P}} - 1) \quad (10)$$

$$\tilde{\mathfrak{D}}^e = (\tilde{\mathfrak{P}} - 1) F(\tilde{p}).$$

c_1 ist der Massenrenormierungsterm. $c_2(\tilde{\mathfrak{P}} - 1)$ bedeutet eine Ladungsrenormierung. Die Funktion $F(\tilde{p})$ muß so beschaffen sein, daß sie gleich Null ist, wenn $(\tilde{\mathfrak{P}} - 1)u = 0$ und $\tilde{p}^2 = 1$ gilt, wie bei einem freien Dirac-Teilchen. Diese Zerlegung führt zu

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{D}}^e = (4\pi)^{-1} (\tilde{\mathfrak{P}} - 1) \int_0^1 dx \left\{ (1-x) \ln \frac{A^2 - (\tilde{p}^2 - 1)x(1-x)}{A^2} - 2 \frac{x^2(1-x)}{A^2} \right. \\ \left. - \frac{\tilde{\mathfrak{P}} + 1}{\tilde{p}^2 - 1} x \ln \frac{A^2 - (\tilde{p}^2 - 1)x(1-x)}{A^2} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

mit der Abkürzung $A^2 = x^2 + \delta^2(1-x)$.

Damit wird

$$S_B^e = -i g^4 \frac{2\pi}{\sqrt{w w'}} \bar{u}' \gamma^5 \frac{\tilde{\mathfrak{P}} + 1}{\tilde{p}^2 - 1} \tilde{\mathfrak{D}}^e \frac{\tilde{\mathfrak{P}} + 1}{\tilde{p}^2 - 1} \gamma^5 u. \quad (12)$$

Durchziehen von γ_5 und einfache Umformung ergibt:

$$S_B^e = i g^4 \sqrt{\omega \omega' x'} (4\pi)^{-1} \bar{u}' \{ J_B^1 + (\tilde{\mathfrak{P}} - 1) J_B^2 \} u. \quad (13)$$

Die Integrale J_B^1 und J_B^2 sind elementar lösbar, so daß (13) den strengen Beitrag der Graphen B angibt.

$$\begin{aligned} J_B^1 = \int_0^1 dx x \ln \frac{A^2 - (\tilde{p}^2 - 1)x(1-x)}{A^2} \\ = \frac{1}{2} \frac{\alpha' - \delta^2}{1 - \alpha'} \left[1 + \frac{\alpha' - \delta^2}{1 - \alpha'} \ln \delta + \frac{\sqrt{(\alpha' + \delta^2)^2 - 4\delta^2}}{1 - \alpha'} \tanh^{-1} \frac{\sqrt{(\alpha' + \delta^2)^2 - 4\delta^2}}{\alpha' + \delta^2} \right] \\ - \frac{\delta^2}{1 - \alpha'} \ln \delta + \frac{\delta^2}{2} + \delta^2 \left(1 - \frac{\delta^2}{2} \right) \ln \delta - \frac{\delta^2}{2} \sqrt{4\delta^2 - \delta^4} \tan^{-1} \frac{\sqrt{4\delta^2 - \delta^4}}{\delta^2} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} J_B^2 = \frac{\tilde{p}^2 + 1}{\tilde{p}^2 - 1} J_B^1 = \int_0^1 dx \left[\ln \frac{A^2 - (\tilde{p}^2 - 1)x(1-x)}{A^2} - 2 \frac{x^2(1-x)}{A^2} \right] \\ = -\frac{1}{1 - \alpha'} \left[(\alpha' - \delta^2) \ln \delta + \sqrt{(\alpha' + \delta^2)^2 - 4\delta^2} \tanh^{-1} \frac{\sqrt{(\alpha' + \delta^2)^2 - 4\delta^2}}{\alpha' + \delta^2} \right] \\ - 1 + 2\delta^2 + (3\delta^2 - 2\delta^4) \ln \delta - \frac{2\delta^4(3 - \delta^2)}{\sqrt{4\delta^2 - \delta^4}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{4\delta^2 - \delta^4}}{\delta^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Im Falle $\delta^2 = 0$ ist

$$J_B = J_B^1 = J_B^2 = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)} \left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \alpha \right). \quad (16)$$

Die konvergenten Graphen K ergeben:

$$S_K = -i g^4 \frac{2\pi}{\sqrt{\omega \omega'}} \bar{u}' i (4\pi^3)^{-1} \cdot \int d^4 k \gamma_5 (\mathfrak{P}' - \mathfrak{K} - 1)^{-1} \gamma_5 (\mathfrak{P} - \mathfrak{K} - 1)^{-1} \gamma_5 (\mathfrak{P} - \mathfrak{K} - 1)^{-1} \gamma_5 (\mathfrak{K}^2 - \delta^2)^{-1} u. \quad (17)$$

Durch Umformen der Nukleonausbreitungsfunktionen, Durchziehen der γ_5 und Anwendung von Dirac-Gleichung und Dispersionsbeziehung läßt sich dieser Ausdruck vereinfachen

$$S_K = -i g^4 \frac{2\pi}{\sqrt{\omega \omega'}} \bar{u}' i (4\pi^3)^{-1} \cdot \int d^4 k \frac{\mathfrak{K} (\mathfrak{P} - \mathfrak{K} + 1) \mathfrak{K}}{(k^2 - 2 p k) (k^2 - 2 p' k) (k^2 - 2 \bar{p} k - \alpha') (k^2 - \delta^2)} u; \quad (17')$$

\mathfrak{P} und α' in K müssen von denen in S_A und S_B^c verschieden sein. Wie in der analogen Arbeit über die Compton-Streuung von Brown und Feynman⁶⁾ gezeigt wird, ist es vorteilhaft, die Integrale von K erst nach Bildung der Übergangswahrscheinlichkeit auszuwerten. Nur im extrem nichtrelativistischen Grenzfalle ist es Ashkin, Simon und Marshak⁴⁾ gelungen, die Integrale in geschlossener Form zu berechnen. Für beliebige Anfangsenergien des Mesons ist ihre Lösung mit erträglichem Aufwand nicht zu erreichen. Jedoch in der Näherung $\delta^2 = 0$ kann man für alle Energien geschlossene Lösungen angeben. Man kommt dann zu Integralen, die in der Compton-Effekt-Arbeit von Brown und Feynman behandelt wurden.

4. Differentieller Wirkungsquerschnitt unter Nullsetzung von δ^2

Der differentielle Wirkungsquerschnitt, der den Anteil der Streuung in einer bestimmten Richtung ϑ (Winkel zwischen Anfangs- und Endrichtung des Mesons) pro Raumwinkelelement $d\Omega$ angibt, lautet:

$$d\sigma = N_0 \frac{1}{s} 2\pi \varrho_F w; \quad (18)$$

hierin sind $N_0 = \frac{1}{E'}$ ein Normierungsfaktor (wegen $\bar{u} u = 1$), $s = 1$ der einfallende Mesonstrom, $\varrho_F = \frac{d\Omega \omega'^3 E'}{(2\pi)^3 \omega}$ die Eigenwertdichte der Energie des Endzustandes und w der Ausdruck

$$w = \frac{1}{2} \sum_{\text{Spin}} |S_A(g^2) + S(g^4)|^2. \quad (19)$$

(Es wird dabei über die Spinzustände des Anfangsnukleons gemittelt und über die des Endnukleons summiert.)

Man hat in w nur Glieder in g^4 und g^6 zu berücksichtigen, denn nur die allein sind vollständig. Für die Prozesse der Gruppe (I) erhält man

$$w_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi g^2}{\sqrt{\omega \omega'} \kappa} \right)^2 \left(-\frac{\kappa \tau}{2} \right) \left[1 + \frac{g^2}{4\pi} W(\kappa, \tau) \right] \quad (20)$$

mit

$$W(\kappa, \tau) = 2 \left(1 - \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\tau} \right) J_B(\kappa) - 2 \left(1 - \frac{\kappa}{\tau} \right) y \coth y + 2 [\mathfrak{L}(1 - \tau) - \mathfrak{L}(1)] \quad (21)$$

$$- \frac{1}{2} (\kappa + \tau) y^2 \operatorname{csch}^2 y - \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\kappa}{\tau} \right) + h(y) - \ln \tau \right] (\kappa + \tau) 2 y \operatorname{csch} 2 y^2.$$

Die Abkürzungen y , $h(y)$ und $\mathfrak{L}(x)$ haben dieselbe Bedeutung wie bei Brown und Feynman⁹⁾:

$$4 \sinh^2 y = -(\kappa + \tau) \quad (21a)$$

$$h(y) = y^{-1} \int_0^y dx x \coth x = \ln(2 \sinh y) - \frac{y}{2} + (2y)^{-1} \left[\frac{\pi^2}{6} + \mathfrak{L}(e^{-2y}) \right] \quad (21b)$$

$$\mathfrak{L}(x) = \int_0^x \frac{du}{u} \ln(1-u) \quad \mathfrak{L}(1) = -\frac{\pi^2}{6}. \quad (21c)$$

Dort findet man auch weitere Angaben zu $h(y)$ und $\mathfrak{L}(x)$. w_2 für die Gruppe (II) ergibt sich aus w_1 einfach durch Vertauschen von κ mit τ in $W(\kappa, \tau)$.

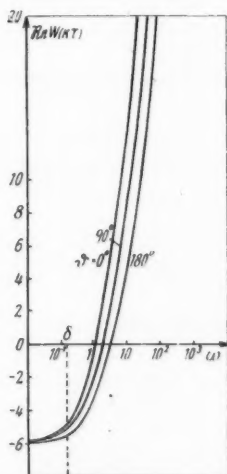


Abb. 3. Korrektur zweiter Näherung in Abhängigkeit von $\omega = \frac{|\kappa|}{2}$ für (I)

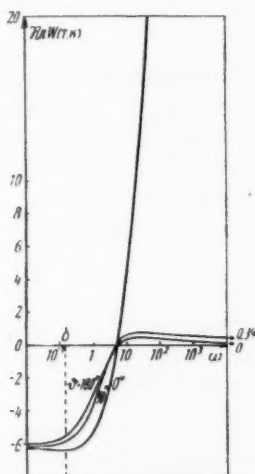


Abb. 4. Korrektur zweiter Näherung in Abhängigkeit von $\omega = \frac{|\kappa|}{2}$ für (II)

⁹⁾ Als eine gewisse Rechenkontrolle kann man wie Brown u. Feynman die Relation $\sigma(g^4) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} S(g^4) \right\}_{\theta=0^\circ}$ ansehen. Man findet, daß die Identitäten

$$\sigma_{1:2}(g^4) = \frac{2}{4} \frac{g^4}{(-\kappa)} \cdot \begin{cases} \operatorname{Im} W(\kappa, \tau = -\kappa) \\ \operatorname{Im} W(\tau = -\kappa, \kappa) \end{cases}$$

erfüllt sind.

Die differentiellen Wirkungsquerschnitte für $\delta^2 = 0$ lassen sich somit in folgender Form darstellen:

$$\frac{d\sigma_1}{d\Omega} = \Re \frac{g^4}{4} \left(-\frac{\tau}{\kappa} \right)^3 \left[1 + \frac{g^2}{4\pi} W(\kappa, \tau) \right] \quad (22)$$

$$\frac{d\sigma_2}{d\Omega} = \Re \frac{g^4}{4} \left(-\frac{\tau}{\kappa} \right) \left[1 + \frac{g^2}{4\pi} W(\tau, \kappa) \right]. \quad (23)$$

Bei der Bildung des Realteiles hat man einfach κ durch $|\kappa|$, $\ln \kappa$ durch $\ln |\kappa|$ und $\Im(1 - \kappa)$ durch $-L_2(1 + |\kappa|)$ zu ersetzen. $L_2(x) = -\int_0^x \frac{du}{u} \ln |1 - u|$ ist der sogenannte Dilogarithmus. Diese Funktion ist in einer Arbeit von Mitchell¹⁰⁾ untersucht und tabuliert worden.

Die Winkelabhängigkeit von $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ist in der Größe τ enthalten, die ja die doppelte Endenergie des gestreuten Teilchens bedeutet:

$$\tau = \frac{|\kappa|}{1 + \frac{|\kappa|}{2} (1 - \cos \vartheta)}. \quad (24)$$

In Abb. 3 und 4 sind die Korrekturfunktionen zweiter Näherung $\Re W(\kappa, \tau)$ und $\Re W(\tau, \kappa)$ für die Streuwinkel $\vartheta = 0^\circ$, 90° und 180° dargestellt; mit δ ist die Lage der Mesonruhenenergie angegeben.

5. Nichtrelativistischer Grenzfall der differentiellen und totalen Wirkungsquerschnitte

Um die Möglichkeit des Vergleiches mit den Ergebnissen von Corinaldesi und Field²⁾ zu haben, bestimmen wir für beide Prozeßgruppen den nichtrelativistischen Grenzfall von $\frac{d\sigma}{d\Omega}$.

In (22) und (23) ist einzusetzen:

$$|\kappa| = 2\omega \quad \text{und} \quad \tau = \frac{2\omega}{1 + \omega(1 - \cos \vartheta)} \approx 2\omega [1 - \omega(1 - \cos \vartheta)];$$

wir entwickeln immer bis zu Gliedern in ω . Die Ergebnisse sind:

$$\frac{d\sigma_1}{d\Omega} = \frac{g^4}{4} \left\{ 1 - 3\omega(1 - \cos \vartheta) + \mathcal{O}(\omega^2) - \frac{g^2}{4\pi} [6 - 6\omega - 15\omega(1 - \cos \vartheta) + \mathcal{O}(\omega^2)] \right\} \quad (25)$$

$$\frac{d\sigma_2}{d\Omega} = \frac{g^4}{4} \left\{ 1 - \omega(1 - \cos \vartheta) + \mathcal{O}(\omega^2) - \frac{g^2}{4\pi} [6 + 6\omega - 9\omega(1 - \cos \vartheta) + \mathcal{O}(\omega^2)] \right\}. \quad (26)$$

Der Vollständigkeit wegen seien auch die durch Integration über die Winkel erhaltenen Gesamtwirkungsquerschnitte angegeben:

$$\sigma_1 = \pi g^4 \left\{ 1 - 3\omega + \mathcal{O}(\omega^2) - \frac{g^2}{4\pi} [6 - 21\omega + \mathcal{O}(\omega^2)] \right\} \quad (27)$$

$$\sigma_2 = \pi g^4 \left\{ 1 - \omega + \mathcal{O}(\omega^2) - \frac{g^2}{4\pi} [6 - 3\omega + \mathcal{O}(\omega^2)] \right\}. \quad (28)$$

¹⁰⁾ K. Mitchell, Philos. Mag. 40, 351 (1949).

6. Extrem relativistischer Grenzfall der differentiellen und totalen Wirkungsquerschnitte

Im extrem relativistischen Grenzfall ($2\omega = |\kappa| \gg 1$) muß man die Darstellung der differentiellen Wirkungsquerschnitte für kleine und große Streuwinkel ϑ getrennt vornehmen. Wir wollen hier die genaue Vorwärtsstreuung ($\vartheta = 0^\circ$, $\tau = -\kappa$, $p' = p$ und $q' = q$) untersuchen; dabei ist es möglich, die Größe δ^2 zu berücksichtigen, denn die von dem Term S_K kommenden Integrale können dann unter der Annahme $\frac{\delta^2}{|\kappa|} \ll 1$ ausgewertet werden. Wählen wir die Bezeichnung dieser Integrale in Analogie zu Brown und Feynman, so ergeben sich [mit den Abkürzungen $(1) \equiv k^2 - 2pk$, $(-\kappa') \equiv k^2 - 2p_2k - \kappa'$, $(\delta) \equiv k^2 - \delta^2$ in den Nennern] für Prozesse (I) [für (II) hat man die entsprechenden Umbenennungen vorzunehmen]:

$$H_o = \frac{2i}{\pi^2} \int d^4k \frac{k_o}{(1)^2(\delta)} = 2p_o \left[1 - \delta^2 \ln \delta - (2 - \delta^2) \frac{\delta^2}{\sqrt{4\delta^2 - \delta^4}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{4\delta^2 - \delta^4}}{\delta^2} \right]$$

$$F_o = \frac{2i}{\pi^2} \int d^4k \frac{1}{(1)^2(-\kappa')} = \frac{4}{\sqrt{4\delta^2 - \delta^4}} \tan^{-1} \frac{\delta^2}{\sqrt{4\delta^2 - \delta^4}}$$

in strenger Berechnung und

$$J_o = \frac{2i}{\pi^2} \int d^4k \frac{1}{(1)^2(-\kappa')(\delta)} = -\frac{2}{\kappa} \left[-1 + \ln \frac{(-\kappa)}{\delta} - \left(1 + \frac{4}{\kappa}\right) \frac{\delta^2}{\sqrt{4\delta^2 - \delta^4}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{4\delta^2 - \delta^4}}{\delta^2} \right]$$

$$\bar{G}_o = \frac{2i}{\pi^2} \int d^4k \frac{1}{(1)(-\kappa')(\delta)} = -\frac{2}{\kappa} \left[\zeta(1 + \kappa) - \frac{\pi^2}{6} \right] + \frac{2}{\kappa} \bar{G}_o$$

unter der Annahme $\frac{\delta^2}{|\kappa|} \ll 1$; $\bar{G}_o = \int_0^1 \frac{dx}{x} \ln [(1-x)^2 + \delta^2 x] \approx -2,83$, das von

κ unabhängig ist, mußte numerisch gelöst werden (mit $\delta = 0,15$). Durch Berücksichtigung der wirklichen Mesonmasse ergibt sich so im extrem relativistischen Falle für die Vorwärtsstreuung eine Verschiebung der in Abb. 3 und 4 gezeichneten 0° -Kurve um den Betrag $-0,30$.

Unter der wahrscheinlich berechtigten Annahme, daß auch für die anderen Streuwinkel die Energieabhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnittes im extrem relativistischen Falle für $\delta^2 \neq 0$ keinen wesentlich anderen Charakter hat als für $\delta^2 = 0$, wollen wir von den Formeln (22) und (23) ausgehend den totalen Wirkungsquerschnitt im extrem relativistischen Energiebereich ermitteln. Wir machen von der Möglichkeit Gebrauch, an Stelle der Integration über den Winkel ϑ die über die Endenergie des Mesons auszuführen. Wir müssen über τ von

$\tau_{\min} = \frac{2\omega}{1+2\omega}$ (für $\vartheta = 180^\circ$) bis $\tau_{\max} = 2\omega$ (für $\vartheta = 0^\circ$) integrieren:

$$\sigma = 4\pi \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \frac{d\tau}{\tau^2} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right). \quad (29)$$

Es treten dabei Integrale der Form $\int \frac{dx}{x} \ln(1-a x) \ln(1-b x)$ auf. Sie können nach einer Formel von Sandham¹¹⁾ ausgewertet werden:

$$\frac{2}{x} \ln(1-a x) \ln(1-b x) = \frac{d}{dx} \left[\mu(a x) + \mu(b x) + \mu\left(\frac{a-b}{a(1-b x)}\right) - \mu\left(\frac{x(a-b)}{1-b x}\right) \right] \\ + \frac{d}{dx} \left[\ln^2 \frac{b}{a} \ln(1-b x) - \ln^2 \frac{b}{a} \ln^2 \left(\frac{b(1-b x)}{b-a}\right) - 2 \ln \frac{b}{a} L_2\left(\frac{a(1-b x)}{a-b}\right) \right].$$

Hier ist $\mu(x)$ die logarithmische Transzendente $\mu(x) = \int_0^x \frac{du}{u} \ln^2(1-u)$. Wir benötigen keine Tabelle für $\mu(x)$, weil wir im extrem relativistischen Falle mit der Formel

$$\mu(x) = -\mu\left(\frac{1}{x}\right) + 2 \left[L_2\left(\frac{1}{x}\right) \ln x + \psi\left(\frac{1}{x}\right) \right] + \frac{1}{3} \ln^3 x + 2 \psi(1)$$

auf ein $\mu(x)$ mit kleinem Argument umrechnen und dann die Entwicklung

$$\mu(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \quad |x| \ll 1$$

verwenden können.

$\psi(x)$ ist die bekannte Reihe $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$ und

$$\psi(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1.645$$

Als weitere besondere Integrale treten auf

$$\int \frac{dx}{x+a} L_2(x), \quad \int \frac{dx}{x} L_2\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2} \psi\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{x+a} L_2\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

die entweder durch partielle Integration auf die oben angegebene Form gebracht werden können oder durch Reihenentwicklung oder mit Hilfe der Zerlegungsformel $L_2\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\pi^2}{3} - 2 [\ln^2 x + L_2(x) + L_2(-x)]$ zu behandeln sind. Als totale Wirkungsquerschnitte im extrem relativistischen Falle bei verschwindender Mesonmasse finden wir:

$$\sigma_1 = \frac{g^4}{4} \frac{\pi}{\omega} \left\{ 1 + \frac{g^2}{4\pi} \left[\ln 2\omega - 1 + \frac{4}{3} \pi^2 + \psi\left(\frac{1}{\omega}\right) \right] \right\} \quad (30)$$

$$\sigma_2 = \frac{g^4}{4} \frac{2\pi}{\omega} \ln 2\omega \left\{ 1 + \frac{g^2}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \ln 2\omega - 1 + (\dots) \ln^{-1} 2\omega + \psi\left(\frac{1}{\omega}\right) \right] \right\}. \quad (31)$$

Es sind in der zweiten Näherung nur die Glieder berücksichtigt, die von gleicher oder höherer Ordnung in ω wie die erste Näherung sind.

7. Schlußbetrachtung

Die Abb. 3 und 4 lassen erkennen, daß die Winkelabhängigkeit des Verhältnisses von g^4 - zu g^4 -Beitrag im Bereich nichtrelativistischer Mesonenergien für beide Prozeßgruppen gering ist. Im extrem relativistischen Falle zeigt sich jedoch ein wesentlicher Unterschied zwischen (I) und (II); während für (I) eine gleichmäßige

¹¹⁾ H. F. Sandham, J. London Math. Soc. **24**, 83 (1949) [vgl. auch Zbl. Math., **36**, 325 (1951)].

Abnahme von $\vartheta = 0^\circ$ bis $\vartheta = 180^\circ$ vorhanden ist, ergibt sich für (II) ein starkes Hervortreten dieses Verhältnisses bei kleinen Winkeln.

Wegen unserer Näherungsannahme ($\delta^2 = 0$) haben wir erst für $\omega = 0$ Isotropie der Streuung und nicht bei $\omega = \delta$ (eigentlicher extrem nichtrelativistischer Grenzfall; Thomson — Grenzfall).

Zur Abschätzung des durch Vernachlässigung der Mesonmasse begangenen Fehlers stellen wir unsere Werte $-0,37 g^2$ und $-0,52 g^2$ für das Verhältnis der differentiellen Streuquerschnitte in zweiter zu erster Näherung (für $\omega = 0,15$ und $\vartheta = 0^\circ$) zum Vergleich mit den durch strenge Berechnung des Thomson-Grenzfall von Ashkin, Simon und Marshak⁴⁾ ermittelten Werten $-0,43 g^2$ und $-0,64 g^2$ für $\frac{\sigma(g^4)}{\sigma(g^2)}$ jeweils für Prozesse (I) und (II).

Die ersichtlichen Fehlerbeträge, die im extrem relativistischen Falle noch geringer werden ($\approx -0,02 g^2$), wie die strengere Berechnung im Abschnitt 6 gezeigt hat, sind einer geschlossenen Darstellung für alle Energiebereiche willen wohl in Kauf zu nehmen. Abgesehen von einer Vorzeichendiskrepanz stimmen unsere Ergebnisse im nichtrelativistischen Bereich (Abschnitt 5) mit denen von Corinaldesi und Field²⁾ überein bei Berücksichtigung von $\delta^2 = 0$ [die totalen Streuquerschnitte $\sigma_2(g^4)$ und $\sigma_2(g^2)$ sogar schon ohne diese Vernachlässigung].

Allgemeine Überlegungen von Dyson¹²⁾ und eine Abschätzung von Katayama und Yamazaki¹³⁾ haben für die Quantenelektrodynamik ergeben, daß das Störungsverfahren wahrscheinlich nur zu asymptotischen Reihenentwicklungen nach Potenzen der Kopplungskonstanten führt. Dies ist vermutlich auch bei den Mesontheorien der Fall. Solange solch eine Reihe mit einer Anzahl rasch abnehmender Glieder beginnt, können die mit diesen Gliedern allein gewonnenen praktischen Ergebnisse von Nutzen sein. In der Quantenelektrodynamik ist diese Möglichkeit vorhanden, weil vor allem der Entwicklungsparameter ($\alpha = \frac{1}{137}$) klein ist.

In der $PS(ps)$ -Theorie ist wohl g^2 von der Größenordnung 1 anzunehmen, und man kann nur dann eine brauchbare asymptotische Entwicklung erwarten, wenn die zu den wachsenden Potenzen von g^2 gehörenden Entwicklungskoeffizienten stark genug abnehmen. An dem in der vorliegenden Arbeit behandelten Beispiel sehen wir jedoch, daß der g^4 - und der g^6 -Beitrag von der gleichen Größenordnung sind. Die Gleichungen [(30) und (31)] für σ_1 und σ_2 im extrem relativistischen Energiebereich beweisen weiter, daß die g^6 -Näherung für genügend hohe Energie ω die g^4 -Näherung immer überwiegt, d. h., daß das Störungsverfahren nicht bis zu beliebig hoher Energie gültig ist. Wenn man bedenkt, daß man durch die Störungsrechnung wahrscheinlich weder eine konvergente Reihe, sondern auch kaum eine brauchbare asymptotische Entwicklung in der $PS(ps)$ -Theorie erhält, kann man mit diesem Verfahren in den ersten Näherungen gewonnenen Ergebnissen nur wenig reellen Wert beimessen.

Die experimentellen Ergebnisse der Streuung von π^+ - und π^- -Mesonen an Wasserstoff von Isaacs, Sachs und Steinberger¹⁴⁾ und von Anderson, Fermi und Mitarbeitern¹⁵⁾ lassen sich im Rahmen der $PS(ps)$ -Theorie auch unter Hinzunahme der zweiten Näherung nicht erklären. Mit der $PS(pv)$ -Theorie (pseudovektorielle

¹²⁾ F. J. Dyson, *Physic. Rev.* **85**, 631 (1952).

¹³⁾ Y. Katayama u. K. Yamazaki, *Proc. Theor. Phys.* **7**, 601 (1952).

¹⁴⁾ P. J. Isaacs, A. M. Sachs u. J. Steinberger, *Physic. Rev.* **85**, 803 (1952).

¹⁵⁾ H. L. Anderson, E. Fermi u. a., *Physic. Rev.* **85**, 934–936 (1952); **86**, 793 (1952).

Kopplung) würde man zwar den zunächst erforderlichen Anstieg des Wirkungsquerschnittes mit der Energie erhalten; doch in dieser Theorie wachsen die in der g^4 -Näherung berechneten Streuquerschnitte unbeschränkt an (vgl. Ashkin, Simon und Marshak⁴⁾); nur mit einer phänomenologischen Theorie ist es Brueckner¹⁶⁾ gelungen, ein Abbiegen der Kurven zu bekommen, wie man es experimentell bei etwa 200 MeV findet. Ein Versuch von Sawada¹⁷⁾, allein den Anstieg der Streuquerschnitte in der ersten störungstheoretischen Näherung der $PS(pv)$ -Theorie in quantitativer Hinsicht dem Experiment anzugleichen, sei erwähnt, weil er den möglichen Einfluß etwaiger, noch hypothetischer, schwerster Teilchen auf die Meson-Nukleon-Streuung zeigt. Sawada nimmt Interferenzen zwischen dem gewöhnlichen Streuprozeß (vgl. Graph A_1 oder A_2 der vorliegenden Arbeit) und einem analogen Prozeß mit einem V' -Teilchen der Masse $m_{V'} \approx 3000 m_e$ (als „Mutterteilchen“ zu den bekannten V -Teilchen angenommen) an Stelle des Nukleons im Zwischenzustand an.

Es scheint so, daß man mit der $PS(pv)$ -Theorie bessere Ergebnisse erzielen kann. Jedoch lassen sich hier die höheren Näherungen noch nicht bewältigen, so daß man über die Güte des Störungsverfahrens in diesem Falle nichts aussagen kann.

Zum Vergleich mit den entsprechenden Rechnungen bei der Compton-Streuung (Brown und Feynman⁶⁾) seien noch folgende Hinweise gegeben. Für $\delta^2 = 0$ treten in der $PS(ps)$ -Theorie keine der Ultrarotkatastrophe in der Quantenelektrodynamik analogen Divergenzen auf. Im extrem nichtrelativistischen Falle (Thomson-Grenzfall: $\omega \rightarrow 0$) bleibt ein endlicher Beitrag der g^6 -Näherung der Meson-Nukleon-Streuung übrig, während die e^6 -Näherung der Compton-Streuung mit $\omega \rightarrow 0$ verschwindet. Wie Thirring¹⁸⁾ gezeigt hat, verschwinden beim Compton-Effekt alle höheren Näherungen im Thomson-Grenzfall. Auffallend ist auch der charakteristische Unterschied der Winkelabhängigkeit des Verhältnisses der beiden Näherungen $\frac{d\sigma(g^6)}{d\sigma(g^4)}$ und $\frac{d\sigma(e^6)}{d\sigma(e^4)}$ im Falle des π^+ - oder π^- -Mesons (pseudoskalares, komplexes Feld mit pseudoskalarer Kopplung) und des Photons (vektorielles, reelles Feld mit vektorieller Kopplung).

Für wertvolle Diskussionen und Hinweise während der Entstehung dieser Arbeit habe ich Herrn Dr. H. Lehmann zu danken.

¹⁶⁾ K. A. Brueckner, Physic. Rev. **86**, 106 (1952).

¹⁷⁾ K. Sawada, Prog. Theor. Phys. **7**, 592 (1952).

¹⁸⁾ W. Thirring, Philos. Mag. **41**, 1193 (1950).

Jena, Theoretisch-Physikalisches Institut der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 8. Mai 1953.)

Gitterquell-Interferenzen harter Röntgen-Bremsstrahlung*)

Von Hans Christoph Wolf

(Mit 13 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Eine seinerzeit von Determann aufgefundene und als „Kikuchibänder mit Röntgenstrahlen“ kurz beschriebene Erscheinung wird gründlich untersucht. Es wird gezeigt, daß sie schon im Sinne der Intensitätsverteilung, also in einem qualitativen Zug, eine Demonstration des von v. Laue 1949 betonten und rechnerisch erfaßten Eingreifens echter Absorption in die dynamischen Interferenzvorgänge bedeutet, und daß — vermutlich der extrem kleinen Kohärenzlänge wegen — bei sehr harter Strahlung die dynamischen Erscheinungen mehr und mehr zurücktreten.

I. Einleitung. — II. Experimentelle Verfahren und Ergebnisse. 1. Die Erzeugung der Strahlung (Beschreibung der Apparatur); 2. Die Filterung (Errechnung der Wellenlänge); 3. Die Interferenzen: Allgemeine Züge. Bandbreite. Reflexbreite. Dunkelhellstruktur. — III. Diskussion und Theorie der Ergebnisse. 1. Die Dunkelhellstruktur, Vergleich mit der bestehenden dynamischen Theorie; 2. Prüfung der Gültigkeit der Theorie und Grenzen ihrer Anwendbarkeit; Kohärenzlänge, Kristallqualität. 3. Vergleich der beobachteten mit verwandten Interferenzerscheinungen. Grenzen und Anwendungsmöglichkeit der hier verwandten Methodik. — IV. Zusammenfassung. Literatur.

I. Einleitung

Röntgen-Interferenzen aus Gitterquellen, Röntgen-Interferenzen also, für die eine Einkristall-Antikathode zugleich als Quelle und als Gitter dient, wurden von Kossel und Mitarbeitern seit 1934 eingehend untersucht¹⁾. Es wurde hierbei die Eigenstrahlung, insbesondere die K-Strahlung, eines Einkristalls mit Elektronen oder mit Röntgenstrahlen hinreichender Härte erregt und als deren Interferenzen das Reflexsystem des Kristalls so vollständig und übersichtlich beobachtet, wie es nur mit einer Versuchsanordnung möglich ist, bei der alle Reflexe des Raumgitters gleichzeitig stark und sehr scharf angeregt werden. Es zeigte sich bald, daß die Lage der gefundenen Interferenzlinien elementar verständlich, ihre Intensität und Struktur dagegen mit den elementaren Theorien der Röntgen-Interferenzen nicht zu erklären waren. Deshalb wurden einerseits die experimentellen

*) Die Ergebnisse dieser Arbeit wurden auf der Tagung der Physikalischen Gesellschaft Württemberg Baden-Pfalz in Ueberlingen am 27. 4. 1952 vorgetragen.

¹⁾ W. Kossel, *Erg. ex. Naturwiss.* 16, (1937) 295 ff.

Untersuchungen sehr verfeinert (Voges, Borrmann, Moritz²⁾) andererseits gelang es, das Phänomen auch theoretisch zu erfassen (Ott, v. Laue³⁾) usw.

Qualitativ konnte die dynamische Theorie der Interferenzen die beobachteten Linien-Strukturen und -Intensitäten weitgehend erklären. Daß sie in ihrer bisherigen Form noch nicht in vollem Maße den experimentellen Befunden gerecht wird, hat seinen Grund darin, daß auch sie noch stark vereinfachende Annahmen gebraucht: streng monochromatische Strahlung einer Punktquelle, idealer Kristallbau, Vernachlässigung der Absorption.

Daß die Schwächung der Strahlung im Raumgitter für von der dynamischen Theorie bis heute noch nicht geklärte Züge der Gitterquell-Interferenzen: Intensitätsstufen im Untergrund und Strukturwandel längs einer Linie, verantwortlich zu machen sei, wurde bereits bei der Entdeckung dieser Erscheinungen vermutet und zeigte die Richtung, in der die dynamische Theorie weiter zu entwickeln war. Inzwischen mehrten sich die Belege dafür, daß in Interferenzrichtungen ein Raumgitter wesentlich andere Absorptionseigenschaften hat als außerhalb derselben. So konnte Borrmann⁴⁾ etwa zeigen, daß die Braggsschen Richtungen im Kristall Richtungen erhöhter Durchlässigkeit sind; seine Beobachtungen wurden neuerdings von Campbell⁵⁾ ergänzt. Kohler⁶⁾ führte in die dynamische Theorie die echte Absorption der Strahlung ein; die vollständige Durchrechnung eines Interferenzfalles gab v. Laue⁷⁾. Er konnte damit die Borrmannschen Befunde erklären. Ein Ziel der vorliegenden Arbeit ist es zu zeigen, wie auch wesentliche Züge der Gitterquell-Interferenzen durch die Schwächung der Strahlung im Kristall bedingt sein können.

Das Auftreten von Intensitätsstufen im Untergrund zeigte ferner die enge Verwandtschaft zu den Kikuchi-Linien und -Bändern der unelastisch in einem Kristall gestreuten und dann interferierenden Elektronen. Es lag nahe, diese Analogie experimentell weiter zu treiben und die Gitterquell-Interferenzen auf Wellenlängenbereiche auszudehnen, wie sie den üblichen Elektronen-Interferenzuntersuchungen bei etwa 10 bis 50 kV entsprechen. Man kann so aus Parallelversuchen mit Röntgen- und Elektronenstrahlen eine Prüfung und Fortentwicklung der dynamischen Theorie zu einer „Neuen Kristalloptik“⁸⁾ erwarten.

II. Experimentelle Verfahren und Ergebnisse

Der Ausdehnung der Versuche über Röntgeninterferenzen aus Gitterquellen auf kürzere Wellenlängen ist bei Verwendung von Fluoreszenzstrahlung mit den Wellenlängen der *K*-Serien der schwersten Elemente eine natürliche Grenze gesetzt; will man weiterkommen, so muß man statt dessen in der Einkristall-Antikathode die Bremsstrahlung erregen, diese durch geeignete Filter so weit schwächen, daß nur ihr härtester Anteil als „monochromatische“ Strahlung übrig bleibt und

²⁾ G. Borrmann, Ann. Physik **27**, 667 (1936); H. Voges, Ann. Physik (5) **27**, 694 (1936); E. Moritz, Optik **3**, 28 u. 4, 216 (1948).

³⁾ M. v. Laue, Röntgenstrahlinterferenzen, 2. Aufl. Leipzig 1948.

⁴⁾ G. Borrmann, Z. Physik **127**, 297 (1950); Naturwiss. **38**, 330 (1951).

⁵⁾ H. N. Campbell, J. appl. Phys. **22**, 1139 (1951); Acta Cryst. **4**, 180 (1951); weitere Arbeiten hierzu: Schwarz Rogosa, Phys. Rev. **86**, 421 (1952); G. N. Ramachandran, J. appl. Phys. **23**, 500 (1952).

⁶⁾ M. Kohler, Ann. Physik (5) **18**, 265 (1933).

⁷⁾ M. v. Laue, Acta Cryst. **2**, 106 (1949).

⁸⁾ W. Kossel, Optik **3**, 178 (1948).

die Interferenzen dieses Restes untersuchen (Determann⁹). Die experimentelle Arbeit gliedert sich demnach in Erzeugung, Monochromatisierung und Interferenz-Beobachtung. Als charakteristische Unterschiede gegenüber den Untersuchungen von Voges und Borrmann seien hervorgehoben: kürzere Wellenlängen, Bremsstrahlung, Beobachtung der Interferenzen in Transmission bei weitgehend symmetrischer Anregung.

1. Die Erzeugung der Bremsstrahlung

Als Spannungsquelle stand ein — unbelastet bis 600 kV arbeitender — selbsterregender Bandgenerator zur Verfügung. Das Entladungsrohr war horizontal gelagert; seine Konstruktion zeigt Abb. 1. Es wurde hierfür ein Porzellanrohr von 2 m Länge gewählt; es endet in einem den Pumpansatz, das Blendensystem und die Kristallhalterung umfassenden Endstück. Glühkathodenheizung und Wehneltspannung werden mit Schnurzügen aus Perlon¹⁰ reguliert. Der Rohrkopf samt Hilfsgeräten ist umgeben von einem als Kugel aus engmaschigem Drahtnetz ausgeführten Faraday-Käfig von 60 cm Durchmesser. An ihn stößt der Konduktor des Generators.

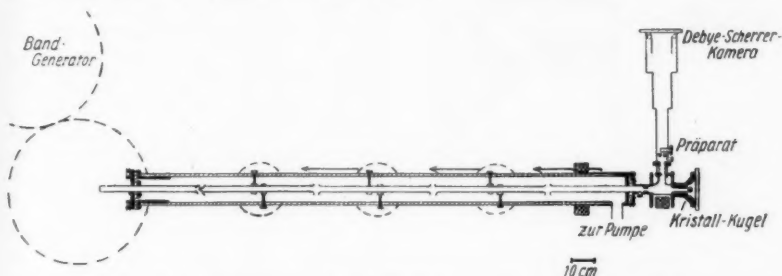


Abb. 1. Schnitt durch das Entladungsrohr, z. T. schematisch

Beschleunigung und Konzentration des Strahls geschah nach bekannten elektronenoptischen Prinzipien mittels der von Rogowski und Grösser¹¹ angegebenen, von Bricka und Bruck¹² durchkonstruierten Elektronenquelle (hohle Halbkugel als Wehneltzylinder, Spitzanode), der zur Nachbeschleunigung drei λ essing-Hohlzylinder (3 cm Durchmesser, etwa 2 cm gegenseitiger Abstand) als Zwischenelektroden folgten. Kathode und Zwischenelektroden konnten von außen in den drei Raumrichtungen justiert werden.

Auf der Außenseite des Rohres ist die Halterung einer jeden Stufe von einem Faraday-Käfig aus Drahtnetz umgeben. Eine in ihrer Länge veränderliche Sprühstrecke besorgt die Potentialverteilung längs des Rohres. Das Rohr liefert einen intensiven Elektronenstrahl von einigen 10μ A. Eine Spule am Rohrende konzentriert ihn auf einige Zehntel mm^2 auf die Kristallblende. Es bewährte sich bisher im Bereich von 100 bis 400 kV; seine Konstruktion erlaubt auch den Übergang zu höheren Beschleunigungsspannungen. Bei der großen Rohrlänge erwies sich allerdings trotz der hohen Elektronen-Geschwindigkeit ein magnetischer Störschutz durch Umkleidung der Zwischenelektroden mit Mümetall als nötig.

Auf der geerdeten Seite endet das Beschleunigungsrohr in einem Metallschliff; an ihn schließen an die Kristallhalterung mit Blendensystem, die Ablenkvorrichtung zum gleichzeitigen Herstellen von Debye-Scherrer-Interferenzen mit Elektronen zur Spannungsmessung, und die Öldiffusionspumpe.

⁹) H. Determann, Schr. d. nat.forsch. Ges. Danzig NF XX, Heft 2 (1937).

¹⁰) W. Kossel, Z. angew. Physik 3, 117 (1951).

¹¹) Rogowski u. Grösser, Arch. El. Techn. 15, 377 (1925).

¹²) Bricka u. Bruck, Ann. de Radioélectr. 3, 339 (1949).

Das Blendensystem (Abb. 2) wurde so angeordnet, daß der Kristall vor der in den Blenden entstehenden Strahlung so weit wie möglich geschützt ist. Der durch eine erste Blende auf 1 mm im Durchmesser ausgeblendete Elektronenstrahl gelangt durch eine zweite, engste Blende (0,1 bis 1 mm) auf den ihr unmittelbar aufsitzenden Kristall. Dieser und die zweite Blende werden von einer runden Kupferplatte getragen; sie ist in einen wassergekühlten Kupfer-Hohlring von rechteckigem Querschnitt einzusetzen, welcher seinerseits in dem massiven Bleikörper sitzt, der den Abschluß der ganzen Anordnung bildet. Seine trichterförmige Erweiterung erlaubt den Austritt der Röntgenstrahlung nach hinten, seinen Vakuumabschluß bildet eine Glasplatte. Sie muß von der zu photographierenden Strahlung durchdrungen werden. Auf der Kupferplatte wird der Kristall in einer seinem Durchmesser angepaßten Aushöhlung von einer Aluminiumfolie gehalten. Diese Art der Befestigung läßt den Halbraum hinter dem Kristall zur Beobachtung frei, gleichzeitig ermöglicht sie optimale Wärmeabfuhr von der Kristall-Antikathode.

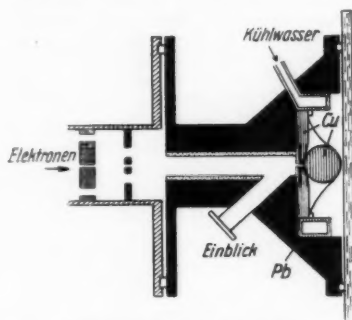


Abb. 2. Schnitt durch das Blendensystem und die Kristallhalterung

wurde der Elektronenstrahl in einer zwischen erster Blende und Kristallhalterung einsetzbaren Ablenkammer (s. Abb. 1) von 10 mm Höhe magnetisch auf einem Kreisbogen von etwa 3 cm Halbmesser um 90° abgelenkt und in eine Debye-Scherrer-Kamera geführt. Bei einem Abstand von 48 cm zwischen Präparat und Photoplate erhält man von einer auf Kollodium aufgedampften Silberschicht auch bei 400 kV noch hinreichend genau auswertbare Interferenzringe.

Zur dauernden Kontrolle der Spannungskonstanz während der Exposition diente ein einfacher elektrostatischer Spannungsmesser¹³⁾. Allerdings brauchte hier auf Spannungskonstanz nur in relativ weiten Grenzen — etwa 10% — geachtet zu werden; die Schärfe der Interferenzen wird weit mehr durch die Dicke des Filters als durch die Konstanz der Spannung begrenzt (s. S. 393 und 395).

2. Die Monochromatisierung der Strahlung

Die vom kleinen intensiven Brennfleck im Kristall ausgehende Bremsstrahlung muß monochromatisiert werden. Will man einen großen Raumwinkel offen lassen, um gleichzeitig die ganze Vielfalt der möglichen Interferenzen zu beobachten, so kommt zum Monochromatisieren nur ein Herausfiltern des härtesten Anteils in Frage. Man bedient sich also der Wellenlängenabhängigkeit des Röntgen-Schwächungskoeffizienten μ und benutzt als Filter im wesentlichen den einige Millimeter dicken Einkristall selber. Die Anordnung zeigt Abb. 3.

Die Dicke des Filters ist so zu wählen, daß es die zum Photographieren notwendige Intensität hindurchläßt und doch zu deutlichen Interferenzen hin-

¹³⁾ H. Hinz, Ann. Physik (5) 40, 66 (1941).

¹⁴⁾ W. Knauer, Diplomarbeit Tübingen 1951.

reichende Monochromasie erreicht. Sie ist verantwortlich für die Breite des zur Interferenz zugelassenen Wellenlängen-Bereiches $\Delta\lambda$, für Höhe und Lage seines Maximums λ'_{\max} , λ''_{\max} und $\Delta\lambda$ werden wie folgt errechnet:

Von der Ausgangsintensität I_0 bleibt beim Durchgang durch d cm eines Materials mit dem Schwächungskoeffizienten μ die Intensität

$$I = I_0 e^{-\mu d}. \quad (1)$$

übrig.

Man hat also, um I als Funktion der Wellenlänge zu ermitteln, I_0 und μ zu kennen.

Die spektrale Intensitätsverteilung $I_0(\lambda)_U$ der Röntgen-Bremsstrahlung ist nicht hinreichend bekannt, um in geschlossener Form angegeben zu werden. Insbesondere die hier interessierende Nähe der kurzwelligen Grenze zeigt Feinstrukturen, die die Unvollständigkeit der bisherigen Theorien über die Entstehung der Bremsstrahlung deutlich machen; diese Feinstrukturen liegen zu nahe an der kurzwelligen Grenze, als daß sie im folgenden zu berücksichtigen wären. Die experimentelle Bestimmung der Intensitätsverteilung ergab im übrigen das bekannte Bild: Anstieg der Intensität von der kurzwelligen Grenze λ_0 bis zu einem Maximum bei der Wellenlänge λ_{\max} , dann allmählicher Abfall zu weichen Strahlen hin. [Zusammenfassend referiert bei Kulenkampff¹⁴⁾, ferner Kulenkampff und Schmidt¹⁵⁾.

Die Durchsicht dieser Untersuchungen zeigt weiterhin, daß genaue Angaben über die Lage von λ_{\max} schwer zu machen sind, weil die Meßkurven durch verschiedene notwendige Korrekturen (Absorption in der Antikathode, spektrale Abhängigkeit der Empfindlichkeit des verwendeten Registriergerätes) mit großen Unsicherheiten behaftet sind. Man entnimmt aber den Messungen, etwa denen von Kulenkampff und Schmidt¹⁵⁾, daß die oft verwendete Beziehung

$$\lambda_{\max} = 3/2 \lambda_0, \text{ also } \lambda_{\max} \cdot U = \text{const.} \quad (2)$$

(U ist die Anregungsspannung) bei härterer Strahlung allenfalls für die „wahre“ Energieverteilung in der (dünnen) Antikathode gültig ist. In den Registriergeräten (Ionisationskammer oder photographische Schicht) wird aber im allgemeinen von der einfallenden Strahlung ein um so geringerer Bruchteil absorbiert, je härter die Strahlung ist. Die tatsächlich beobachtete Energieverteilung — und mit ihr muß im folgenden gerechnet werden — weicht deshalb von der wahren Energie-Verteilung in der Antikathode ab. Die gemessenen Intensitätsverteilungen [siehe in¹⁵⁾] lassen sich gut darstellen durch eine Gleichung der Form

$$\lambda_{\max} \cdot \sqrt{U} = \text{const.} \quad (3)$$

Der Wert der Konstanten muß aus gemessenen Intensitätsverteilungen — hier wurden diejenigen von Kulenkampff und Schmidt benutzt — entnommen

¹⁵⁾ H. Kulenkampff, Hdb. d. Phys. Geiger-Scheel, XXIII/2, 142 ff.; H. Kulenkampff u. L. Schmidt, Ann. Physik (5) 43, 494 (1943).

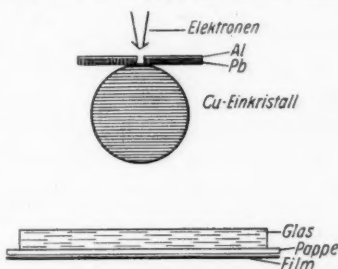


Abb. 3. Die Gitterquellmethode

werden, und daraus läßt sich λ_{\max} für die gewünschte Anregungsspannung U errechnen. Es wird weiter zur Berechnung von I der Intensitätsanstieg von λ_0 zu λ_{\max} als linear angenommen:

$$I_0 = K (\lambda - \lambda_0). \quad (4)$$

Die Wellenlängen-Abhängigkeit des Schwächungskoeffizienten μ ist ebenfalls geschlossen nicht zu erfassen. Sie kann in hinreichender Entfernung von Absorptionskanten dargestellt werden durch ein Potenzgesetz

$$\mu = c \lambda^n. \quad (5)$$

Hierin ist auch n eine Funktion der Wellenlänge. Für $\lambda > 0,3 \text{ \AA}$ ist $2,5 < n < 3$, für $\lambda < 0,05 \text{ \AA}$ wird n etwa gleich 1.

Aus den Gln. (1), (4) und (5) folgt für die Intensitätsverteilung der gefilterten Bremsstrahlung

$$I = K (\lambda - \lambda_0) e^{-c \lambda^n d}. \quad (6)$$

Daraus folgt für feste Anregungsspannung als Beziehung zwischen Filterdicke und Wellenlänge maximaler Intensität im gefilterten Rest λ'_{\max} , und damit auch etwa für dessen Halbwertsbreite $\Delta\lambda$

$$\lambda'^{n-1}_{\max} (\lambda'_{\max} - \lambda_0) = \frac{1}{c n d}. \quad (7)$$

Um einen Anhalt über die zu erwartenden Wellenlängen zu haben und zur Prüfung der Gln. (6) und (7) wurden mittels der bekannten Schwächungskoeffizienten die Filterungen von Bremsspektren bei 125, 250 und 375 kV Anregungsspannung in Kupferschichten verschiedener Dicke errechnet. Die Kurven der resultierenden spektralen Intensitätsverteilung geben die Abb. 4a—c, die daraus zu entnehmenden Werte für λ' sind in Abb. 5 zusammengestellt.

Die Genauigkeit der nach der beschriebenen Methode errechneten Wellenlängen und Halbwertsbreiten dürfte angesichts der zahlreichen zugrunde liegenden Vernachlässigungen und der Unsicherheit in der Annahme des Wertes λ_{\max} nicht wesentlich besser als 10% sein.

In der Berechnung der Schwächung wurden die Schwächungskoeffizienten polykristallinen Kupfers für einkristallines Material übernommen; für die Interferenzrichtungen selbst trifft diese Gleichsetzung nicht mehr zu, ist aber im übrigen korrekt. Ferner sei noch erwähnt, daß die als Quelle, Gitter und Filter arbeitenden Einkristalle kugelförmig waren; die im folgenden angegebenen Filterdicken bezeichnen jeweils den Durchmesser der Kugel, sind also nur für Strahlen nahe dem Zentrum exakt zutreffend.

Als „monochromatisch“ muß nach Ausweis der Rechnung ein Wellenlängenbereich von etwa $0,05 \text{ \AA}$ verwendet werden, wollte man nicht extrem dicke Filter — damit auch sehr lange Expositionszeiten — benötigen. Der sich daraus errechnende hohe Wert von 0,25 bis 1 für $\Delta\lambda/\lambda$ begrenzt die Schärfe der beobachteten Interferenzen.

Um trotz möglichst scharfer Filterung auch bei kleinem Brennfleck erträgliche Expositionszeiten zu ermöglichen, war die Anwendung eines intensiven Elektronenbündels — Einbau einer Konzentrationsspule — erforderlich. Dies bedeutet eine starke thermische Belastung für den Kristall. Das gute Wärmeleitvermögen von Kupfer und die beschriebene gekühlte Kristallhalterung sorgten jedoch für ausreichende Wärmeabfuhr.

Reicht die Kristalldicke zur Filterung nicht aus, so kann man durch Zwischenschalten weiterer Filterbleche zwischen Kristall und Film jede beliebige Filter-

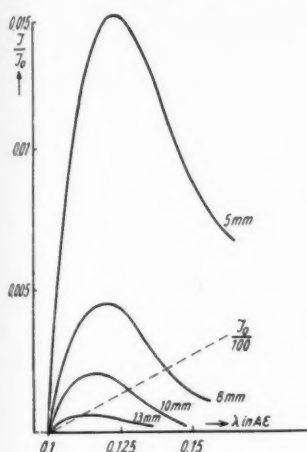


Abb. 4a

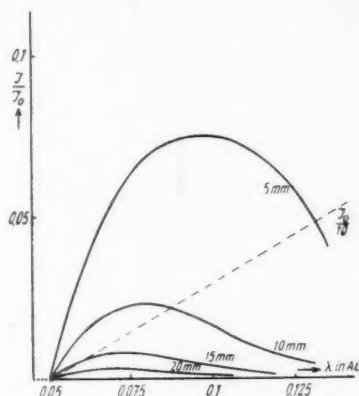


Abb. 4b

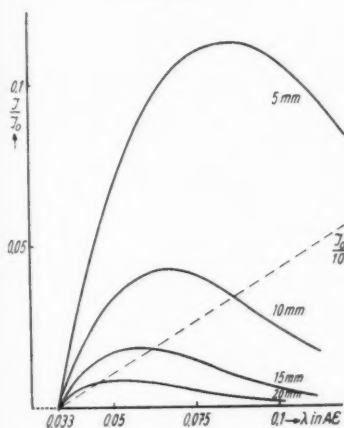


Abb. 4c

Abb. 4. Die Filterung des Bremskontinuums durch verschieden dicke Cu-Schichten bei einer Anregungsspannung von a: 125 kV; b: 250 kV; c: 375 kV

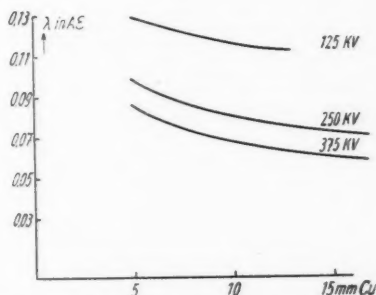


Abb. 5. Wellenlänge maximaler Intensität im gefilterten Rest des Bremskontinuums als Funktion der Filterdicke bei verschiedenen Anregungsspannungen

stärke erreichen. Es zeigte sich jedoch, daß zusätzliche Filter die — ohnehin auf starkem Untergrund erscheinenden — Interferenzen, durch Streustrahlung, ver-
wischen bis zur völligen Unsichtbarkeit. Bei der Untersuchung dünner Kristalle

mußte deshalb die Filterung bereits vor dem Kristall vorgenommen werden, an Stelle des Gitterquellverfahrens trat eine Weitwinkelaufnahme in Transmission.

Das vor dem Kristall befindliche Filter soll einerseits möglichst gut monochromatisieren; will man einen der Gitterquell-Methodik möglichst ähnlichen

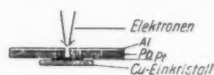


Abb. 6. Weitwinkelmethodik mit monochromatisierender Antikathode

Strahlenverlauf im Kristall erreichen, so muß das Filter andererseits möglichst dünn sein. Ein dickeres Filter bedeutet größeren Abstand zwischen Quelle und Kristall und damit andere Anregungsbedingungen. Seines gegenüber Kupfer um eine Größenordnung höheren Schwächungskoeffizienten wegen eignet sich hierfür Platin. Eine Platinfolie von 0,1 bis 0,2 mm Dicke, als Antikathode direkt auf den Einkristall aufgelegt, läßt nur noch hinreichend monochromatische Strahlung hindurch; diese kann in der dünnen Folie bis zum Eintritt in den Kristall nicht sehr diffus werden. Mit der in Abb. 6 skizzierten Anordnung wurden die Versuche an Kristallen von weniger als 1 mm Dicke ausgeführt.

3. Die Interferenzen

a) Untersucher Bereich und allgemeine Züge der Aufnahmen

Mit der Versuchsanordnung nach Abb. 3 war die Untersuchung der Interferenzen im Bereich von 100 bis etwa 400 kV bei Kristall- bzw. Filterdicken von

1 bis etwa 15 mm Kupfer, also im Wellenlängenbereich von etwa 0,15 bis 0,05 Å möglich. Nach höheren Spannungen hin wurden die Versuche durch die Strombelastbarkeit des Bandgenerators begrenzt. Als Gitterquellen standen Kupfer-Einkristalle zur Verfügung, orientierende Versuche wurden auch an Einkristallen aus Silber und aus Zink durchgeführt. Sie zeigten, daß der Charakter der Interferenzen sowohl bei höheren Atomgewichten (Ag) wie in anderen Gittern (Zn: hexagonal) unverändert bleibt. Im folgenden soll deshalb nur von den Untersuchungen an Kupfer berichtet

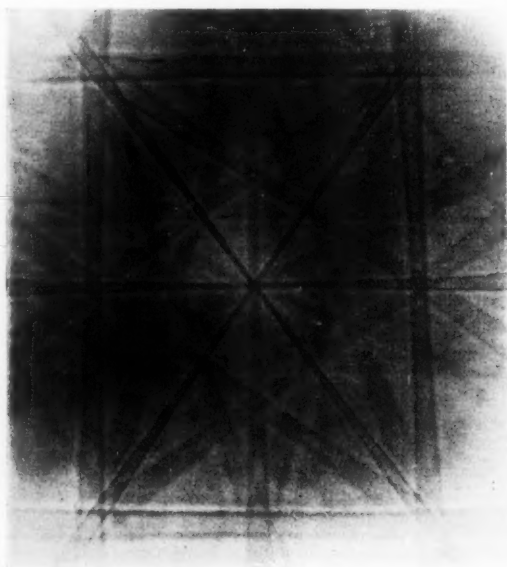


Abb. 7a

werden. Der Abstand zwischen Quelle und Film lag zwischen 15 und 50 mm, im allgemeinen betrug er 20 mm. Die Expositionszeit schwankte zwischen einigen und 150 Minuten, die Größe des Brennflecks, bestimmt durch die Kristallblende, zwischen 1 mm und 0,1 mm; meist wurde mit einem Brennfleckdurchmesser von 0,25 mm gearbeitet.

Als Aufnahmematerial mußte trotz seiner ungünstigen Eigenschaften (grobes Korn, zu große Dicke und mangelnde Formkonstanz der Unterlage) doppelseitig begossener Röntgenfilm (Agfa) verwendet werden, da Platten mit feinerem Korn sich als zu wenig empfindlich erwiesen. Ein Fortschritt gegenüber dem handelsüblichen Röntgenfilm wurde erzielt mit einem von der Agfa-Photofabrik (Leverkusen) zur Verfügung gestellten Versuchsfilm; dieser wies bei nur wenig geringerer Empfindlichkeit ein feineres Korn und eine wesentlich dünnere Unterlage auf. Einige typische Aufnahmen — photographische Negative — zeigen die Abb. 7 und 8; ihre Indizierung gibt Abb. 9. Man sieht auf ihnen — in der Umgebung des Würfels — bzw. Rhombendekaeders bei verschiedenen Wellenlängen und Filterdicken — von dem vollständigen Reflexsystem des kubisch-flächenzentrierten Gitters erwartungsgemäß nur einige Reflexe, die der dichtestbesetzten Netzebenen, aus dem Untergrund hervortreten; Tabelle 1 gibt die beobachteten Reflexe in der Reihenfolge ihrer Intensitäten.

Man sieht besonders scharf die Reflexe $\{111\}$ und $\{200\}$, bei ihnen auch noch andeutungsweise die zweiten Ordnungen, ferner $\{220\}$ und $\{311\}$. Die Reflexe $\{331\}$ und $\{420\}$ lassen sich im Untergrund einiger stark gefilterter Aufnahmen noch ahnen, in der Repro-



Abb. 7b

Abb. 7. Aufnahmen vom Rhombendekaederspol. Kristalldicke 14 mm, ca. 1,3fach nachvergrößert. a: 0,095–0,105 ÅE, ca. 150 kV. b: 0,07–0,08 ÅE, ca. 250 kV

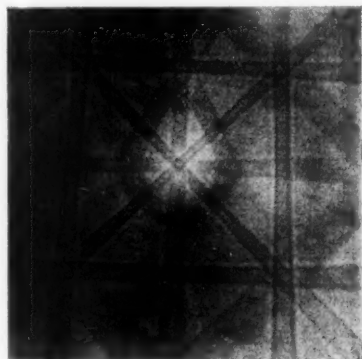
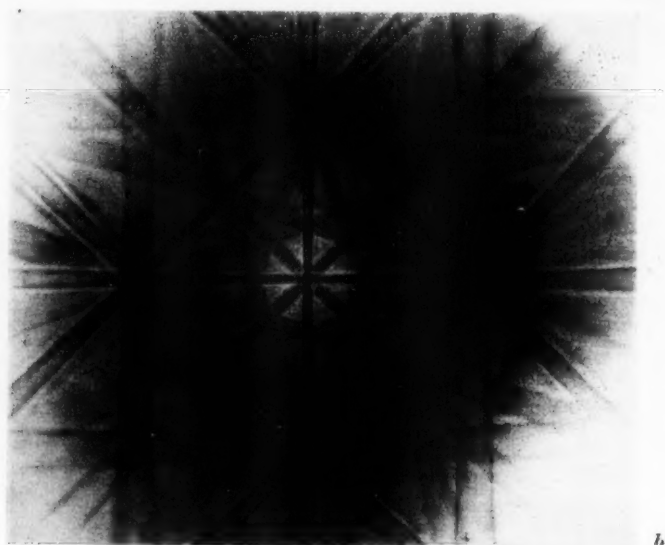
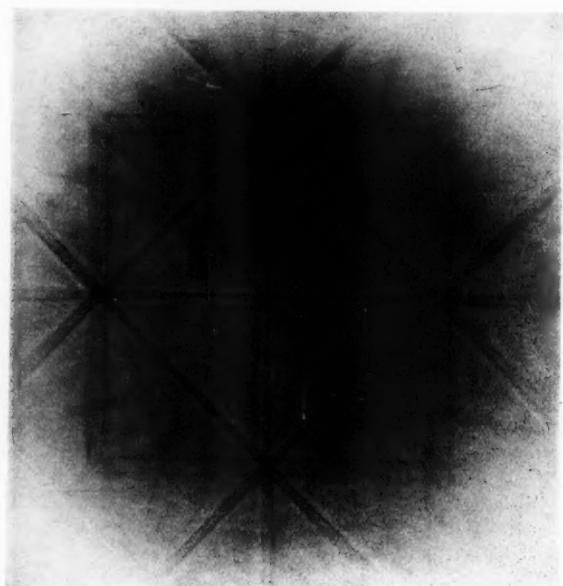


Abb. 8a. Legende hierzu siehe S. 390



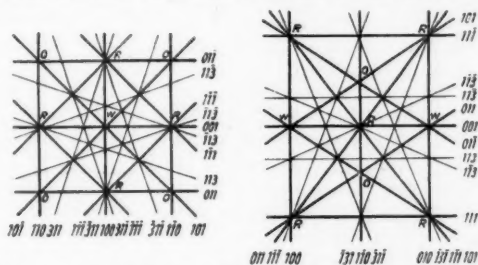
b



c

Abb. 8. Aufnahmen vom Würfelpol. Kristalldicke 5 mm bei 8a, sonst 14 mm, ca. 1,3fach nachvergrößert. a: 0,14–0,15 ÅE, ca. 100 kV; b: 0,10–0,11 ÅE, ca. 150 kV; c: 0,07–0,08 ÅE, ca. 250 kV

duktion erscheinen sie nicht mehr. Die Schärfe der Interferenzen ist begrenzt; sie ist um so geringer, je härter die Strahlung ist. Aufnahmen mit kürzesten Wellenlängen lassen praktisch nur noch die Reflexe $\{111\}$ und $\{200\}$ und diese undeutlich, erkennen, für eine Reproduktion eignen sie sich nicht. Die Reflexe erscheinen als Scharen paralleler Netzebenen zugeordnete Interferenzkegel großer Öffnung. Für die verwendeten Wellenlängen ist $\lambda/a \ll 1$, die Schnitte dieser Kegel mit dem Film kommen als Hyperbeln sehr kleiner Krümmung den Spuren der reflektierenden Netzebenen sehr nahe; die Reflexe an Vorder- und Rückseite derselben Netzebenen schließen diese Spur zwischen sich ein und erzeugen so als charakteristisches Gitterquell-Interferenzbild sehr kurzer Wellenlängen ein System relativ weniger, schmaler Bänder. (Unter Band sei hier und im folgenden verstanden der von Reflex an Vorder- und Rückseite derselben Netzebenenschar eingeschlossene Bereich einschließlich der Reflexe selbst.)



b) Die Bandbreite

Die Bandbreite, gemessen als Abstand der Reflexe von Vorder- und Rückseite derselben Netzebenenschar, wird durch die Bragg'sche Gleichung

$$\sin \vartheta = \frac{\lambda}{2a} \sqrt{h^2 + k^2 + l^2} \quad (8)$$

a = Gitterkonstante h, k, l = Lauesche Indizes

gegeben. Bei der endlichen und gegen ihren Abstand nicht mehr kleinen Breite der Linien muß die Frage beantwortet werden, welcher Teil einer Linie dem Bragg-Winkel ϑ entspricht. Die Vermutung, daß die Grenze zwischen gegenüber dem Untergrund „hellem“ und „dunklem“ Bereich mit dem Bragg-Winkel weitgehend übereinstimme, läßt sich exakt nur durch eine Messung der Wellenlänge der abgelenkten Röntgenstrahlung nachprüfen. Aus Intensitätsgründen mußte auf sie verzichtet werden. Statt dessen wurde, wie oben beschrieben, die Geschwindigkeit der anregenden Elektronen mittels Debye-Scherrer-Interferenzen auf etwa 2% genau bestimmt, aus Abb. 6 die der Filterdicke zugehörige Röntgen-Wellenlänge mit einer Unsicherheit von etwa 10% entnommen und zwischen den daraus nach Gl. (8) errechneten und den Winkeln ϑ aus den Röntgen-Interferenzen, gemessen von Dunkelhell- zu Dunkelhellgrenze, Übereinstimmung gefunden. Die Ergebnisse einiger Messungen mit Angabe der Fehlergrenzen gibt Tabelle 2.

Tabelle 2

Zur Eichung der Interferenzen. Anregungsspannung U , bestimmt a) mit Elektronen-Debye-Scherrer-Ringen; b) aus den Röntgeninterferenzen nach Gl. (8) und Abb. 6

a		b		
λ (ÅE)	kV	λ (ÅE)	kV	Filterdicke
$3,3 \cdot 10^{-3}$	125	0,11—0,12	130—140	11 mm
$3,6 \cdot 10^{-3}$	105	0,13—0,14	100—110	5 mm
$2,9 \cdot 10^{-3}$	160	0,10—0,11	150—160	11 mm
$2,65 \cdot 10^{-3}$	190	0,08—0,09	180—190	14 mm
$2,35 \cdot 10^{-3}$	220	0,08—0,07	220—230	14 mm

Damit ist gezeigt, daß die Grenze zwischen hellem und dunklem Bereich etwa dem Bragg-Winkel entspricht. Daß der Scheitel des Winkels ϑ , die Spitze der Interferenzkegel, nicht weiter als höchstens 0,5 mm vom Auftreffpunkt der Elektronen im Kristall entfernt sein kann, wurde durch Messung der Divergenz der Röntgenstrahlung an mehreren in hinreichendem Abstand hintereinander angeordneten Filmen gesichert. Nach dieser Eichung der Interferenzen konnten sie selbst zur Wellenlängenmessung benutzt werden, die hierbei erreichbare Genauigkeit ist nicht größer als etwa 10%.

c) Die Linienbreite

Die beobachteten Linienbreiten setzen sich zusammen aus verschiedenen Anteilen. Unabhängig von der Beobachtungsentfernung gibt die Größe des strahlenden Bereiches — definiert durch Brennfleckbreite und endliche Eindringtiefe der

Strahlung vor einer Umsteuerung, oder, sofern der ganze Kristall an den Interferenzen beteiligt ist, durch dessen Dicke — die Mindestbreite. Die Absorptionstiefe liegt in der Größenordnung mm, ϑ ist kleiner als $5 \cdot 10^{-2}$. Multipliziert man mit ϑ die Eindringtiefe, so erhält man die daraus resultierende Linienbreite zu $< 0,25$ mm, kleiner als die im allgemeinen gewählte Brennfleckbreite. Es wird aber längs des ganzen Weges der Strahlung durch den Kristall Intensität durch Reflexion aus der ursprünglichen Richtung weg und in das Bandinnere hineingesteuert. Für die dadurch zur Linienbreite gegebenen Beiträge — nach dem Bandinneren zu — errechnet man als Produkt von ganzer Kristalldicke und ϑ Werte von etwa 0,2 bis 0,4 mm bei Kristalldicken von einigen Millimetern.

Entfernungsabhängige Linienbreite entsprechend einem $\Delta\vartheta$ in der Bragg-Gl. (8) wird verursacht durch

a) die endliche Breite des Totalreflexionsbereiches; sie beträgt nach v. Laue $\Delta\vartheta = 4 \chi_h / \sin 2\vartheta$ (s. S. 398). Für $\lambda = 0,1$ ÅE errechnet man $\Delta\vartheta$ zu etwa 10^{-4} .

b) Eine Änderung der Gitterkonstanten des Kristalls durch Wärmeausdehnung: der resultierende Wert von $\Delta\vartheta$ liegt nach $\Delta\vartheta = \frac{\Delta a}{a} \operatorname{tg} \vartheta$ selbst in ungünstigsten Fällen unter 10^{-4} .

c) Die endliche Wellenlängenbreite $\Delta\lambda$. Man errechnet den zu erwartenden Wert von $\Delta\vartheta$ aus

$$\Delta\vartheta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\Delta\lambda}{2a} \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$$

als von λ unabhängig zu etwa 10^{-2} .

Begrenzender Faktor für die Linienbreite ist hiernach neben der Kristalldicke nur die Wellenlängenbreite, für die Schärfe der Zeichnung gegen den Untergrund hauptsächlich die letztere. Sie ist aus Intensitätsgründen nicht unter 0,03 bis 0,05 ÅE zu verkleinern, die ihretwegen in 20 mm Entfernung vom Brennfleck zu erwartenden Linienbreiten sind nach Tabelle 1 bereits von der Größe 0,2 bis 0,5 mm. Durch sie wird offenbar die Leistungsfähigkeit des Verfahrens begrenzt.

Alle gemessenen Linienbreiten zeigen die aus Brennfleckgröße, Kristalldicke und Wellenlängenbreite zu erwartenden Werte. In Übereinstimmung mit der Berechnung ergab Verkleinerung des Brennflecks von zunächst 1 auf 0,5 und schließlich 0,25 mm eine wesentliche Erhöhung der Zeichenschärfe; nur bei der kleinsten Blende war eine definierte Linienbreite angebar, nur hier lohnte ein Photometrieren. Bei geeigneter Wahl von Filterdicke und Anregungsspannung — man muß ein Kompromiß schließen zwischen den sich widersprechenden Forderungen geringer Kristalldicke und guter Monochromasie — wurden Linienbreiten von 0,3 bis 0,5 mm gemessen, also nur wenig mehr als vom Brennfleck her zu erwarten war. Noch weitere Verkleinerung des Brennfleckes auf 0,1 mm setzte schließlich nur noch die Intensität herab, ohne daß die Breite der Linien abgenommen hätte. Mit einem 0,25 mm großen Brennfleck war also das Optimum der Auflösung bereits erreicht.

Bei Wellenlängen unterhalb etwa 0,7 ÅE sind die Linienbreiten nicht mehr exakt zu messen. Die allgemeine Unschärfe und Kontrastarmut dieser Interferenzen verhinderte hier trotz Aufhärtung eine Photometrierung.

Kossel und Mitarbeiter¹⁾ konnten seinerzeit das Intensitätsverhältnis von Linien und Untergrund durch Beobachtung in größerer Entfernung verbessern, da, solange der Brennfleck die Linienbreite begrenzt, die Intensität der Linien linear, die des Untergrundes quadratisch mit dem Abstand abnimmt. Dies Verfahren läßt sich hier, der großen Wellenlängenbreite wegen, nur beschränkt anwenden. Größere Abstände als 20 bis 30 mm zwischen Quelle und Film verbessern die Auflösung nicht mehr, es wirkt sich vielmehr die große Wellenlängenbreite in einer geringeren Schärfe der Interferenzen aus.

d) Die Dunkelhellstruktur

Alle beobachteten Linien zeigen eine — und zwar die gleiche — Intensitätsstruktur: der größeren Ablenkungswinkeln ϑ entsprechende innere Rand der Interferenzkegel trägt geringere, der zur Bandmitte weisende Teil höhere Intensität als der Untergrund. Wie unten ausführlich erörtert wird, ist diese Intensitätsstruktur der früher von Kossel, Voges und Borrmann beschriebenen Helldunkelstruktur *invers*. Sie soll deshalb im folgenden als Dunkelhellstruktur bezeichnet werden. Der Extinktionsteil ist im allgemeinen dem Teil mit vermehrter Intensität an Schärfe etwas überlegen, bei kürzeren Wellenlängen tritt der intensitätsreichere Teil deutlicher hervor. Die Dunkelhellstruktur ist am deutlichsten ausgeprägt bei den $\{111\}$ - und $\{200\}$ -Reflexen als den Reflexen an Netzebenen höchster Elektronendichte; bei den schwächeren Reflexen, etwa an $\{311\}$, tritt sie kaum noch in Erscheinung. Am Typ der Dunkelhellstruktur änderte auch eine Verringerung der Kristalldicke bis auf etwa 0,1 mm nichts; soweit damit eine Erhöhung der Wellenlängenbreite verbunden war, nahm die

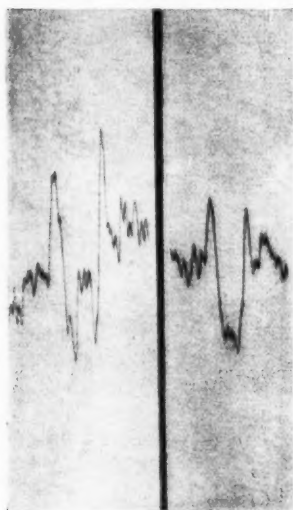


Abb. 10. Typische Photometerkurven von Bändern 111 bzw. 200

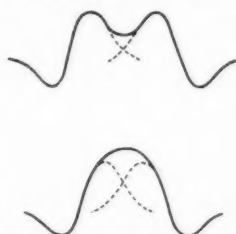


Abb. 11. Bandstrukturen schematisch

Zeichenschärfe der Struktur allerdings ab. Bei noch geringeren Kristalldicken konnte keine Dunkelhellstruktur mehr beobachtet werden. (Die dünnen Kristalle wurden durch Abätzen aus dicken Einkristallen hergestellt.)

Mit abnehmender Wellenlänge treten die Interferenzen immer weniger deutlich aus dem Untergrund hervor. Bei den Interferenzen der härtesten Strahlung lassen Linien- und Bandstruktur sich weniger genau angeben, die Dunkelhellstruktur erscheint nur noch angedeutet.

Zwei typische Photometerkurven quer über Bänder $\{111\}$ bzw. $\{200\}$, aufgenommen nach zweimaligem Aufhärten der Originalaufnahmen gemäß S. 391,

zeigt Abb. 10. Die Photometerkurven zeigen deutlich den starken und unruhigen Untergrund; er ist überall von Reflexlinien durchzogen.

Sind die beiden das Band begrenzenden Reflexlinien — bei gegebener Wellenlänge für die gewählte Beobachtungsentfernung — weit voneinander entfernt, so kann die Intensität in der Bandmitte wieder die des Untergrundes erreichen, falls man die Bandstruktur als einfache Überlagerung zweier über einen größeren Winkelbereich erstreckter Reflexe, eines Kikuchi-Paares, ansehen darf; hier ist dies offenbar der Fall. Wird die Bandbreite von der Größenordnung der Linienbreite, so ergeben sich Bandstrukturen nach Abb. 11.

III. Diskussion und Theorie der Ergebnisse

Die dynamische Theorie der Röntgen- (und Elektronen-) Interferenzen dürfte, nachdem sie nun auch noch eine Absorption der Strahlung mitberücksichtigt, weitgehend abgeschlossen sein. Experimentelle Prüfungen mit Röntgenstrahlen liegen jedoch durchweg im Wellenlängenbereich einiger ÅE; wesentlich kürzere Wellenlängen — überhaupt Bremsstrahlung — wurden meines Wissens zur Untersuchung dynamischer Interferenzen noch nicht verwendet. Die Diskussion kann demnach mit einer ersten Prüfung der dynamischen Theorie mit harter Strahlung verbunden werden; sie hat ferner die Frage zu beantworten, wieweit eine Anwendung der dynamischen Überlegungen hier noch erlaubt und sinnvoll ist. Schließlich hat sie die beobachteten Kikuchi-Bänder mit den Kikuchi-Bändern der Elektronen-Interferenzen zu vergleichen.

Allgemein stehen jeder solchen Prüfung große Schwierigkeiten im Wege: einmal die endliche Ausdehnung des strahlenden Bereiches im Kristall — Brennfleckbreite mal Umsteuerungstiefe — im Gegensatz zu der theoretisch erfaßten Ausstrahlung einer Punktquelle, ferner die endliche Wellenlängenbreite, und endlich ist es oft schwer, die experimentellen Anregungs- und Randbedingungen so genau anzugeben, wie sie von der Theorie gefordert werden (etwa Lage und Größe der Kristalle bzw. Kristallite).

Die Lage der Interferenzen, ihre Abstände und Breiten, sind in den wesentlichen Zügen elementar verständlich und bereits in Teil II diskutiert. Von den darüber hinaus interessierenden Beobachtungen — Bandintensitäten, Größe des mitarbeitenden Bereiches, Einfluß des Filters, Dunkelhellstruktur — soll zunächst die letzte als die auffälligste Erscheinung eingehend erörtert werden.

1. Die Dunkelhellstruktur

Die elementare Erklärung des Zustandekommens einer Dunkelhellstruktur hat von Versuchen mit Äuquenquelle auszugehen — dem Strahlengang nach Rutherford und Andrade¹⁹⁾, siehe auch in¹⁾. An einer Netzebenenschar führt er zu zwei Extinktions- und zwei Reflexionslinien, der Abstand zwischen Reflexionslinie an der „Vorderseite“ und Extinktionslinie an der „Rückseite“ derselben Netzebenenschar sollte gegen Null gehen, wenn die Quelle in den Kristall rückt. Ist jedoch die zunächst vom Brennfleck bestimmte Linienbreite klein gegen die Kristalldicke, so überlegt man leicht, daß Extinktions- und Reflexionslinie nicht mehr die gleiche Breite aufweisen und so völlig aufeinanderfallen, sondern daß letztere in die Extinktionslinie übergehend und sie säumend den inneren Teil

¹⁹⁾ E. Rutherford u. C. Andrade, Philos. Mag. 28, 263 (1914).

des resultierenden Bandes einnimmt. Diese kinematische Erklärung reicht in der Tat zum ersten Verständnis der Dunkelhellstruktur in den Interferenzen aus dicken Kristallen aus. Solange für einen großen Teil des Kristalles die Quelle als Außenquelle wirkt — bei Kristalldicken von einigen Millimetern ist dies der Fall — werden dynamische Erscheinungen durch das sehr viel größere rein geometrisch bedingte teilweise Nebeneinanderfallen von heller und dunkler Linie überdeckt.

Gewisse Züge der beobachteten Interferenzen, besonders der scharfe Übergang zum hellen vom dunklen Teil einer Linie, wie ihn die Photometerkurven Abb. 10 erkennen lassen, dürfen vielleicht als ein Hinweis auf gleichsinnig wirkende dynamisch bedingte Intensitätsstrukturen angesehen werden. Das Auftreten derselben deutlich erkennbaren Dunkelhellstrukturen in den Interferenzen dünner Kristalle (0,5 bis 0,1 mm Dicke bei einer Brennfleckgröße von 0,3 bis 0,5 mm), d. h. in Fällen, wo die Breite der Reflexlinien mit dem Brennfleck größer ist als die Kristalldicke, ist nicht mehr einfach geometrisch verständlich; es zeigt, daß hier die kinematischen Überlegungen durch Anwendung der dynamischen Theorie zu präzisieren sind.

Helldunkelstrukturen an Röntgen-Interferenzen zeigten sich bei den ersten Gitterquell-Interferenz-Versuchen mit der CuK-Strahlung; hier traten sie regelmäßig und am deutlichsten ausgeprägt auf in Fällen symmetrischer Reflexion an senkrecht zur Kristalloberfläche stehenden Netzebenen, d. h. dann, wenn die Reflexion an Vorder- und Rückseite derselben Netzebenenschar gleich stark zur Interferenz angeregt wurde, die Phasenbeziehungen vernachlässigende geometrische Theorie eine völlige Kompensation von extinguiertem Anteil eines Kegels und reflektiertem Anteil des Komplementärkegels hätte vermuten lassen (symmetrischer Laue-Fall).

Die hier beobachteten Interferenzen haben mit den intensivsten Helldunkellinien von Voges und Borrmann gemeinsam, daß es sich auch bei ihnen um Interferenzen im zumindest annähernd symmetrischen Laue-Fall handelt. Der wesentliche Unterschied besteht darin, daß die den Kristall verlassenden Röntgenstrahlen im einen Fall höchstens einige μ , im anderen Dicken von einigen Zehntel Millimetern bis zu einigen Millimetern, also mindestens ein Mehrfaches der Extinktionstiefe, zu durchdringen hatten.

Wie eine Helldunkel- oder Dunkelhellstruktur zustande kommt, und daß ihr Auftreten den Normalfall bedeutet, aus dem sich bei sehr unsymmetrischer Anregung als Extremfälle die reine Hell- bzw. Dunkelstruktur ableiten lassen, zeigt die dynamische Theorie. Betrachtet man das aus Überlagerung von einfallender Welle \mathfrak{H}_0 und reflektierter Welle \mathfrak{H}_h — es gilt $\mathfrak{H}_h = \mathfrak{H}_0 + b_h$, b_h ein Vektor des reziproken Gitters — entstehende Wellenfeld, so erhält man dessen elektrischen Feldvektor \mathfrak{D} zu

$$\mathfrak{D} = e^{2\pi i[\nu t - (\mathfrak{H}_0 \cdot \mathbf{r})]} \{ \mathfrak{D}_0 + \mathfrak{D}_h e^{-2\pi i(b_h \cdot \mathbf{r})} \} \quad \mathbf{r} = \text{Ortsvektor} \quad (9)$$

Gl. (9) ist die Gleichung eines aus Superposition von einfallender und reflektierter Welle aufgebauten, parallel zu den Netzebenen stehenden, senkrecht dazu laufenden Wellenfeldes, mit Bäuchen und Knoten der Bewegung für $(b_h \cdot \mathbf{r}) = \text{const.}^{17)}$. Dies Wellenfeld reicht bis zum Ende einer Netzebenenschar, von dort aus laufen die Partialwellen \mathfrak{H}_0 und \mathfrak{H}_h wieder auseinander. Der Phasenunterschied zwischen \mathfrak{D}_0 und \mathfrak{D}_h variiert beim Durchlaufen des Reflexionswinkels ϑ um π , auf der

¹⁷⁾ W. Kossel, Ann. Phys. (6) 6, 97 (1949).

einen Seite des Gebietes totaler Reflexion an der betreffenden Netzebenenschar fallen die Knoten, auf der anderen die Bäuche in die Netzebenen; auf der einen Seite des Reflexes wird im Ausstrahlungsvorgang erhöhte, auf der anderen verminderte Intensität zu finden sein. v. Laue konnte ferner zeigen, wie bei der Voges-Borrmannschen Versuchsanordnung der gefundene Verlauf der Helldunkelstruktur in Übereinstimmung steht mit dem von der dynamischen Theorie errechneten¹⁸⁾.

Daß für höhere Dicke des Kristalls die Intensitätsfrage gründlicher betrachtet werden muß, folgt daraus, daß man schließlich nicht mehr — wie es bei Voges und Borrmann noch gestattet war — von der Schwächung der Strahlung durch echte Absorption im Kristall absehen kann. Der Schwächungskoeffizient, das auf 1 cm bezogene Maß für die Wechselwirkung von Strahlung und Elektronendichte, hängt im Interferenzfall von der Richtung ab. Fällt der Knoten einer stehenden Bewegung in die Netzebene, so wird die Absorption gering, kommt ein Bauch in die Netzebenen zu liegen, so ist sie stark. Durch Absorption kann bei hinreichender Dicke ein im Kristall verlaufendes Wellenfeld völlig ausgelöscht werden, während ein anderes, günstiger zu den Netzebenen gelegenes, im selben Kristallkörper sehr viel weniger geschwächt und allein beobachtet wird. Quantitative Aussagen über die Intensitätsstrukturen sind angesichts der eingangs erwähnten Unsicherheiten nicht zu erwarten.

Qualitativ zeigen aber die Ergebnisse v. Laues, daß durch Absorption in dicken Kristallen tatsächlich eine der früher beobachteten entgegengesetzte, der hier beobachteten gleichsinnige Intensitätsstruktur sich ausbildet, daß also die ohne Absorption helldunklen Linien bei größeren Dicken der Kristalle in dunkelhelle Linien umschlagen können. Auf diese Konsequenz der Theorie, die Deutung des Struktur-Umschlages bei Röntgen-Interferenzen, wurde bisher noch nicht hingewiesen. Um sie zu zeigen, und um zugleich eine Vorstellung von den zu erwartenden Größenordnungen zu erhalten, knüpfen wir im folgenden unmittelbar an die Ergebnisse der dynamischen Theorie — nach v. Laue⁷⁾ und in seinen Bezeichnungen — an.

Fällt ein Strahl mit dem Wellenvektor $\mathfrak{R}_0^{(a)}$ in Interferenzrichtung für die Netzebenen h auf den Kristall, so erzeugt er an Stelle des von der geometrischen Theorie geforderten Interferenzstrahles $\mathfrak{R}_h = \mathfrak{R}_0^{(a)} + b_h$ 2 Wellenfelder mit je 2 starken Wellen: $\mathfrak{R}_{0,1}$; $\mathfrak{R}_{h,1}$ und $\mathfrak{R}_{0,2}$, $\mathfrak{R}_{h,2}$. Für sie gibt die dynamische Theorie die Bestimmungsgleichungen

$$\mathfrak{R}_{h,1,2} = \mathfrak{R}_{0,1,2} + b_h \quad (11)$$

$$\mathfrak{R}_{0,1,2} = \mathfrak{R}_0^{(a)} - k \delta_{1,2} \quad (z = \text{Lot auf Kristalloberfläche}).$$

Für δ folgt daraus Gl. (9).

In der Korrespondenz von Interferenz- und Resonanzvorgang^{17) 19)} entsprechen diese beiden Wellenfelder der reinen symmetrischen bzw. antisymmetrischen Bewegung. In der dynamischen Theorie findet die Wechselwirkung der Strahlung zwischen den Netzebenen ihren Ausdruck in einer durch die Größe δ (die „Anpassung“) gegebenen richtungsabhängigen Änderung der Wellenvektoren. δ ist eine Funktion der Fourierkoeffizienten der Elektronendichte-Verteilung (ρ_h) und des Einfallswinkels gegen die Netzebene; bei Berücksichtigung echter Absorption werden die Fourierkoeffizienten und damit die Anpassung komplex. Der reelle Teil von δ ist ein Maß für die Extinktion, der imaginäre (δ_i) für die Absorption des Feldes. Die durch die Indizes 1 und 2 unterschiedenen beiden Wellenfelder unterscheiden sich in ihrer Wechselwirkung mit dem Raumgitter. In Feld 1 fällt die Bewegung auf die Netzebenen, in Feld 2 zwischen sie. Feld 1 besitzt kleineren Einfalls-

¹⁸⁾ M. v. Laue, Röntgenstrahlinterferenzen, I. c. S. 375ff.

¹⁹⁾ W. Kossel, Ann. Physik. (5) **36**, 189 (1939).

winkel φ , größeren Glanzwinkel θ , im Kikuchiband erscheint es außen. Das die Netzebenen stärker ergreifende Feld 1 gibt — bei dünnen Kristallen — gegenüber dem Untergrund vermehrte Intensität auf der Außenseite eines Bandes bzw. auf der konkaven Seite eines Reflexkegels, das durch die Netzebenen hindurchschlüpfende Feld 2 wird als geringere Intensität auf der konvexen Seite beobachtet (Helldunkelstruktur von Voges und Borrmann¹⁹⁾).

Berücksichtigt man — unseren Versuchen entsprechend — auch den Einfluß der Absorption, so erhält man für die beiden Wellenfelder auch zwei verschiedene Schwächungskoeffizienten:

$$\sigma_a = \frac{4\pi}{\lambda} \delta_i = \mu \pm \mu^* \quad (13)$$

Zu dem normalen Schwächungskoeffizienten μ tritt in Bragg-Richtungen für das erste Wellenfeld ein positiver, für das zweite ein negativer Summand μ^* hinzu; dieser ist kleiner als μ , richtungsabhängig und in seinem Maximum durchaus von derselben Größenordnung wie μ ; er ist ferner μ proportional, die anomale Schwächung hängt daher wie μ

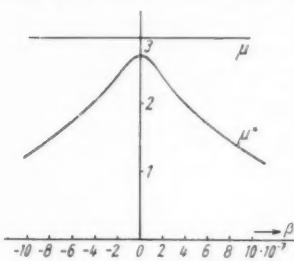


Abb. 12. Der Schwächungskoeffizient im Totalreflexionsbereich

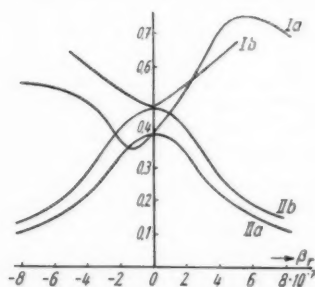


Abb. 13. Relative Intensität des durchgehenden (I) und des reflektierten (II) Strahles bei einer Kristalldicke von 1 mm (a) und 0,1 mm (b)

ist plausibel: zunächst wird die Intensität des abgespaltenen Interferenzstrahles zunehmen, nach Überschreiten der Extinktionstiefe wirkt sich mehr und mehr die Schwächung aus.

Die qualitative Übereinstimmung v. Laues Theorie der Intensitätsstruktur mit den beobachteten Strukturen erscheint danach gesichert. Der Umschlag einer

von der Wellenlänge ab. Abb. 12 gibt σ_a als Funktion des Winkels β ; dies ist nach $\beta = 2 \sin \theta \cdot \Delta$ der Einfallswinkel gegen die Netzebene so normiert, daß er für die Mitte des Totalreflexionsbereiches Null ist; $\beta > 0$ entspricht kleinerem, $\beta < 0$ größerem Glanzwinkel θ , Δ ist der Unterschied zwischen Einfallswinkel und Mitte des Totalreflexionsbereiches.

Das auf die Netzebenen fallende Feld 1 wird also stärker absorbiert, bei großen Kristalldicken wird allein Feld 2 übrig bleiben.

Mit den Schwächungskoeffizienten der Gl. (13) erhält man die für verschieden dicke Kupfer-Kristalle und 0,1 Å Wellenlänge in Abb. 13 gezeichneten Ausstrahlungskurven.

Der unterschiedlichen Schwächung der beiden Felder verdankt die Unsymmetrie der Intensitätsverteilung zur Mitte des Bereiches totaler Reflexion ihr Entstehen (Abb. 13, Kurve 1a). Das schwächer absorbierte Feld 2 hat kleinere Wellenlänge als Feld 1, dementsprechend zeigt die Ausstrahlungskurve jetzt ihr Intensitätsmaximum auf der Seite größerer Einfallswinkel, d. h. im Innern bzw. auf der konvexen Seite der Reflexkegel. Geht man zu dünneren Kristallen über, so ist mehr und mehr für die Struktur der beobachteten Interferenzen nicht die Schwächung, sondern der Aufbau des Feldes entscheidend, man erhält die oben beschriebene, im einzelnen im allgemeinen schwer auszurechnende Helldunkelstruktur. Die „kritische Tiefe“ des Umschlages von Dunkelhell- zu Helldunkelstruktur läge für $\lambda = 0,1$ Å bei etwa $10 \cdot (-100) \cdot 10^{-4}$ cm, für CuK α bei etwa $1 \cdot (-10) \cdot 10^{-4}$ cm, d. h. etwa in der Extinktionstiefe. Dies Ergebnis der dynamischen Theorie

He
fer
no
ma
Au
me
fer
ach
sch
zur
die

fer
me
sic
Kr
we
dy
he
in
er,

Ma
zer
hin
dü
KI
st

sic
all

A
lä
w
lä
de
vo
M
al
m

Helldunkel- in eine Dunkelhell-Linie in einem Bilde, wie er bei Elektroneninterferenzen zu erhalten ist (vgl. z. B. Pfister²⁰), wurde mit Röntgenstrahlen bisher noch nicht gefunden. Man darf aber wohl das teilweise oder völlige Verschwinden mancher an sich als symmetrische Helldunkellinien zu erwartender Reflexe in den Aufnahmen Borrmanns mit dem Erreichen der „kritischen Tiefe“ erklären, um so mehr als bei den durch Elektronen in geringerer Tiefe angeregten Röntgeninterferenzen von Voges dieses Schwächerwerden nicht beobachtet wurde; beide beobachteten ferner den Umschlag „dunkler“ in „helle“ Linien unterhalb eines kritischen Austrittswinkels aus dem Kristall, d. h. oberhalb einer im Kristall zurückgelegten Wegstrecke. Man errechnet aus den genannten Beobachtungen für diese kritische Tiefe einen Wert von einigen μ .

In der hier benutzten Versuchsanordnung war die Untersuchung der Interferenzen sehr dünner Kristalle nur mit der S. 388 beschriebenen Weitwinkelmethodik möglich. Bis herab zu Kupfer-Kristalldicken von etwa 0,1 mm ließen sich (bei 0,1 bis 0,03 ÅE Wellenlänge) noch Interferenzen mit der bei größeren Kristalldicken gefundenen Dunkelhellstruktur beobachten; ob ihr Unschärferwerden und völliges Verschwinden bei weiterem Abätzen der Kristalle der geringeren dynamischen Schwächung nach S. 395 zuzuschreiben ist, läßt sich nicht mit Sicherheit angeben, da der Umschlag in die inverse Struktur nicht gefunden wurde; in der von unabgelenkter Strahlung herrührenden Untergrundschwärzung kann er, wenn vorhanden, nicht mehr hervortreten.

Es bleibt der experimentelle Nachweis für den Umschlag also noch zu führen. Man wird dazu zweckmäßigerweise die Vogessche Versuchsanordnung: Fluoreszenzstrahlung mit Elektronen-Anregung, wählen und die Gitterquellinterferenzen hinter einer etwa 10 bis 100 μ dicken Folie aufzunehmen haben. Dies Verfahren dürfte der besseren Monochromasie und stärkeren Schwächung wegen für die Klärung dieser Frage besser geeignet sein als die Interferenzen der harten Bremsstrahlung.

Die angegebenen kritischen Tiefen — überhaupt alle Zahlenwerte — sind angesichts der zahlreichen, z. T. willkürlichen Abschätzungen in den Rechnungen allerdings recht unsicher.

2. Prüfung der Voraussetzungen der Theorie

Daß die dynamische Theorie mit idealer Monochromasie die Ausstrahlung eines Atoms errechnet, bei jedem Versuch dagegen die Strukturen durch endliche Wellenlängen- und Brennfleckbreite bestimmt sind, wurde bereits erwähnt. Weiterhin wird vorausgesetzt, daß der strahlende Bereich im Atom klein sei gegen die Wellenlänge. Für CuK-Strahlung trifft diese Voraussetzung zweifellos zu. Die Frage nach der Größe des strahlenden Bereiches bei der Entstehung von Bremsstrahlung wird von der wellenmechanischen Theorie der Bremsstrahlung nicht beantwortet²¹). Man darf diesen Bereich wohl als klein gegen die K-Schale ansehen; sieht man ihn aber auch noch als klein gegen Wellenlängen von einigen 10^{-10} cm an, so kommt man schon den Kerndimensionen sehr nahe. Man begegnet derselben Schwierig-

²⁰) H. Pfister, Ann. Physik (6) 11, 239 (1953).

²¹) A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, 2. Aufl. Braunschweig 1944, 2. Bd. S. 495ff.

keit bei Übertragen der dynamischen Theorie von Röntgen- auf Elektroneninterferenzen²²⁾.

Weiter ist der Einfluß von Kristallqualität und von der Kohärenzlänge auf die Interferenzen zu diskutieren. Experimentell ist über die Kohärenzlänge harter Röntgenstrahlen nichts bekannt, auch ihre theoretische Berechnung erscheint — ebenso wie die der Entstehung von Bremsstrahlung überhaupt — noch nicht abgeschlossen. Auch bedarf die Frage der Kohärenzlänge im Zusammenhang mit der dynamischen Theorie einer gesonderten Untersuchung. Hier sei nur hingewiesen auf die außerordentlich kurze Kohärenzlänge der verwendeten Strahlung.

Solange man mit CuK-Strahlung arbeitet, sind Extinktionstiefe (10^{-6} bis 10^{-4} cm) und Kohärenzlänge (einige 10^{-6} cm) noch von ähnlicher Größenordnung; beide sind klein gegen die vermutliche Kristallitgröße im Einkristall (10^{-1} bis 10^{-2} cm nach Voges und Borrmann^{1) 2)}). Mit abnehmender Wellenlänge wächst die Absorptionstiefe und die Extinktionstiefe mit λ^{-1} bis λ^{-2} , die Kohärenzlänge nimmt mit λ^2 ab. Berechnet man die Kohärenzlänge klassisch aus der Strahlungsdämpfung des harmonischen Elektronen-Oszillators, so erhält man²³⁾ für die

Tabelle 3

λ	Extinktionstiefe cm	Kohärenzlänge cm
CuK α	10^{-4} — 10^{-5}	10^{-6}
0,1 ÅE	10^{-2} — 10^{-3}	10^{-7}

Wellenlängen zwischen 0,1 und 0,05 ÅE Kohärenzlängen von einigen ÅE; bei einer Extinktionstiefe von etwa 10^{-2} cm bedeutete dies, daß ein Röntgenstrahl dieser Wellenlänge zwar etwa 0,1 mm tief in den Kristall eindringt, daß dabei

aber jeweils nur Stücke von der Größenordnung 10 ÅE kohärent zusammenarbeiten. Im hier betrachteten Wellenlängenbereich wird die Berechtigung der Anwendung klassischer Vorstellungen über Strahlungsdämpfung und Kohärenzlänge allerdings fraglich. Immerhin macht die Kleinheit der Kohärenzlänge — wenn kleine Kohärenzlänge große Wellenlängenbreite bedeutet — zur Erzielung guter Monochromasie stärkere Filterung nötig, als sie hier vorgenommen werden konnte. Die Verkleinerung der Kohärenzlänge bei vergrößerter Eindringtiefe darf dafür verantwortlich gemacht werden, daß zum Verständnis der beschriebenen Interferenzen kinematische Überlegungen schon weitgehend ausreichen, und daß die Interferenzen um so weniger scharf erscheinen, je kürzer die Wellenlänge wird. Man wird also den Voraussetzungen der dynamischen Theorie eine weitere hinzufügen müssen — sie durfte bisher immer stillschweigend als erfüllt angesehen werden, erst hier wird sie aktuell —: die Kohärenzlänge muß zur Ausbildung eines ausgedehnten monochromatischen Wellenfeldes hinreichend groß sein.

Welche Unsicherheiten der Realbau des Einkristalls in die Randbedingungen der dynamischen Theorie bringt, läßt sich nicht allgemein und nicht exakt angeben. Die Ausbildung stehender Wellenfelder, auf die das Gitter sich einschwingt, wird jedenfalls auf einzelne Kristallite beschränkt sein, wenn nicht die Kohärenzlänge ihre Größe noch weiter herabsetzt. Im idealen Einkristall sollte die Divergenz der Interferenzen ja erst von der hinteren Kristall-Begrenzung ausgehen können, wie es Borrmann⁴⁾ an Kalkspat beobachtete.

²²⁾ M. v. Laue, Materiewellen und ihre Interferenzen, Leipzig 1944.

²³⁾ A. Sommerfeld, Vorl. über theor. Physik, Bd. 3; Elektrodynamik, Wiesbaden 1948, S. 294ff.

3. Vergleich der beobachteten mit verwandten dynamischen Interferenzerscheinungen, Systematik der Kikuchi-Bänder

Die bisher bekannten Kikuchi-Bänder bzw. Intensitätsstrukturen von Reflex-Linien kann man zusammenfassend in der folgenden Weise ordnen: Mit Röntgenstrahlen wurden beobachtet 1. im \AA -Gebiet Linien mit Helldunkelstruktur; zwei korrespondierende Linien wenden sich ihre intensitätsärmeren Seiten zu, sie sind noch zu weit voneinander entfernt als daß man von Bändern sprechen könnte; 2. mit harter Strahlung unterhalb 0,2 \AA Linien mit Dunkelhellstruktur, „dunkle“, d. h. intensitätsreiche Bänder. Auch bei Elektronen-Interferenzen kennt man „dunkle“ und „helle“ Bänder. Pfister²⁰⁾ verfolgte planmäßig, wie die zunächst dunkel-hellen Begrenzungslinien der Bänder, die Kikuchi-Paare, bei wachsender Kristalldicke verschwinden und schließlich in helldunkle Linien umschlagen. Man beobachtet also

	mit Röntgenstrahlen	mit Elektron
bei kleinen Dicken	helldunkel	dunkelhell
bei großen Dicken	dunkelhell	helldunkel

Daß die Intensitätsstrukturen für Röntgen- und Elektronen-Interferenzen invers sind, folgt nach der Ausstrahlungsgleichung der dynamischen Theorie²¹⁾ daraus, daß für Röntgenstrahlen der Brechungsindex kleiner als 1, für Elektronen größer als 1 ist. Dies bedeutet, daß der auf die Netzebenen fallenden Bewegung bei Elektronen kleinere Wellenlänge zukommt als der zwischen den Netzebenen hindurchtretenden, die Richtungsbereiche starker Absorption liegen im Bandinneren.

Theoretisch wurden die Elektronen-Kikuchi-Bänder einerseits von Fues und Riedel²⁴⁾ für den Fall kleiner Strukturfaktoren, andererseits von Artmann²⁵⁾ für hohe Strukturfaktoren behandelt. Die Röntgen-Kikuchi-Bänder entsprechen natürlich des kleinen Wertes von χ wegen ganz dem Fues-Riedelschen Typ; die Bemerkung Artmanns, es gäbe bei Röntgen-Interferenzen zwar die den Kikuchi-Kegeln entsprechenden Reflexkegel, aber keine analogen Bänder, trifft nur zu, so lange man unter Bändern lediglich die im wesentlichen an einer — der obersten — Netzebene entstandenen Bänder versteht. Sowohl der Übereinstimmung in der äußeren Erscheinung wie der Analogie im Zustandekommen wegen erscheint es durchaus gerechtfertigt, den älteren Arbeiten von Kossel und Mitarbeitern folgend auch die hier beschriebenen Interferenzen als Kikuchi-Bänder (mit Röntgenstrahlen) zu bezeichnen. Daß mit Röntgenstrahlen tatsächlich keine Kikuchi-Enveloppen beobachtet werden, liegt an der geringen Zahl der aus dem Untergrund hervortretenden Reflexkegel.

So treten die hier beschriebenen Interferenzen als dritte Gruppe dynamischer Interferenzen neben diejenigen von Elektronenstrahlen — wie sie hauptsächlich im Spannungsbereich um 50 kV bekannt sind — und die Gitterquell-Interferenzen der Fluoreszenzstrahlung. Zum Abschluß sollen die drei Methoden noch kurz in ihren charakteristischen Anwendungsmöglichkeiten verglichen werden.

Will man die dynamische Theorie prüfen, so sind grundsätzlich — des um einige Zehnerpotenzen höheren Streuvermögens wegen — Untersuchungen mit Elektronen denen mit Röntgenstrahlen weit überlegen. Man wird nie erwarten können, eine solche Fülle der Erscheinungen mit Röntgenstrahlen zu finden, wie

²⁴⁾ N. Fues u. H. Riedel, Ann. Physik (6) 6, 105 (1949).

²⁵⁾ K. Artmann, Z. Physik 124, 89 (1948).

sie etwa die Aufnahmen im konvergenten Elektronenbündel liefern. Interessiert die Wechselwirkung von Strahlung und Raumgitter, so wird man mit Elektroneninterferenzen am günstigsten arbeiten.

Gitterquell-Interferenzen mit Fluoreszenzstrahlung sind von besonderem Wert zur Untersuchung der Oberflächen-Qualität makroskopischer Einkristalle. Die scharfe Monochromasie läßt diese Methodik als die geeignete Methode zur Untersuchung dynamischer Vorgänge mit Röntgenstrahlen erscheinen.

Verkleinerung der Wellenlänge führt, wie beschrieben, zu großen Eindringtiefen bei kleinen Kohärenzlängen, ferner zu verminderter Empfindlichkeit des Photographischen Materials, zu kleinen Ablenkswinkeln usw. Dies alles wirkt zusammen, um die damit erhaltenen Interferenzen in ihrer Schärfe gegenüber denen weicherer Strahlung wesentlich herabzusetzen. Bei kurzen Wellenlängen treten die dynamischen Erscheinungen stark zurück; sie werden durch grobere geometrisch bedingte Strukturen leicht überdeckt.

Harte Gitterquell-Interferenzen, oder harte Weitwinkel-Interferenzen mit monochromatisierender Antikathode, haben aber auch ihre charakteristischen Vorteile gegenüber anderen Verfahren: sie stellen der scharfen und symmetrischen Anregung wegen ein besonders empfindliches Verfahren zur Untersuchung der Kristallqualität in größeren Tiefen dar. Grobe Störungen im Gitter werden beobachtet als teilweiser oder völliger Ausfall oder Verbiegung von Linien und Bändern, weniger grobe Fehler führen lediglich zu Unsymmetrien in den Dunkelhellstrukturen. Im Bereich zwischen 100 und 300 kV ist die erreichbare Linienschärfe bei erträglichen Expositionszeiten für Untersuchungen der Kristallqualität in Tiefen zwischen etwa 100 und einigen 1000 μ durchaus geeignet. Sind die zu untersuchenden Kristalle hinreichend dick zur Monochromatisierung der Strahlung und gegen den Elektronenbeschuß hinreichend stabil, so wird man die Gitterquell-Methodik nach Abb. 3 anwenden; liegen Kristalle nur in geringer Ausdehnung vor oder sind sie schlechte Wärmeleiter, würden also durch den Elektronenbeschuß zumindest lokal zerstört, so ist der Weitwinkel-Transmission mit Platin-Antikathode der Vorzug zu geben.

IV. Zusammenfassung

1. Es wird über Röntgeninterferenzen aus Gitterquellen im Bereich von 0,05 bis 0,15 \AA als experimentelle Prüfung der dynamischen Theorie und ihrer Anwendbarkeit bei harter Strahlung berichtet. Verwendet wird Bremsstrahlung von 100 bis 400 kV. Der als Gitter und Quelle dienende Metall-Einkristall ist gleichzeitig Filter zur Monochromatisierung der Strahlung. Entsprechende Interferenzen an sehr dünnen Kristallen werden mit einer Transmissions-Weitwinkelmethodik mit monochromatisierender polykristalliner Antikathode beobachtet.

2. Die Monochromatisierung wird aus der Wellenlängenabhängigkeit des Schwächungskoeffizienten errechnet. Trotz starker Filterung begrenzt die Wellenlängenbreite die Schärfe der Interferenz-Diagramme.

3. Die Interferenzen sind hinsichtlich ihrer Geometrie als mit Röntgenstrahlen erzeugte Kikuchi-Bänder elementar verständlich. Die Intensitätsverteilung in den Bändern („Dunkelhellstruktur“) ist der früher (mit weicher Strahlung ohne Auswirkung der Absorption) von Voges und Borrmann gefundenen Helldunkelstruktur invers. Sie stimmt ihrem Sinne nach überein mit der von v. Laue aus der dynamischen Theorie unter Berücksichtigung der Absorption errechneten. In dicken Kristallen, in denen der Absorptionseinfluß am stärksten sein sollte,

wird die zu erwartende dynamische Dunkelhellstruktur durch eine rein geometrisch bedingte gleichsinnige Intensitätsstruktur überdeckt.

4. Für die ungewohnt harte Strahlung wird man demnach in der Theorie die Anwendbarkeit dynamischer Überlegungen neu prüfen müssen. Es wird vermutet, daß bei großen Dicken die dynamische Wechselwirkung deshalb gegenüber der in 3. erwähnten geometrischen Struktur zurücktritt, weil die mit wachsender Härte der Strahlung abnehmende Kohärenzlänge erheblich kleiner werden sollte als die mit der Härte zunehmende Extinktionstiefe. Die Theorien über Entstehung und Kohärenzlänge der Bremsstrahlung reichen indes heute für eine genauere Behandlung noch nicht aus.

5. Abweichungen und Unsymmetrien in Verlauf und Intensitätsstruktur der Reflexlinien geben der scharfen Anregung wegen sehr empfindlich Auskunft über die Kristallqualität in mit anderen Interferenz-Methoden im allgemeinen nicht erfaßten Tiefen.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Kossel, bin ich sehr dankbar für die Anregung dieser Arbeit und für ihre stete Förderung.

München, Physikalisch-Chemisches Institut der Technischen Hochschule.

(Bei der Redaktion eingegangen am 10. Juni 1953.)

Abbildung von Gasströmungen mit Elektronenstrahlen¹⁾

Von B. Schumacher

(Mit 15 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Es wird gezeigt, daß sich mit Elektronen Gasströmungen durch Schattenabbildung sichtbar machen lassen, auf die das Lichtinterferometer wegen zu geringer Schichtdicke der Strömung nicht mehr anspricht, und daß dabei trotz der Elektronenstreuung im Gas ein hohes geometrisches Auflösungsvermögen erreicht wird. Die Gasdichte der Strömung kann dem Bild entnommen werden, wenn man gewisse Trübungsfunktionen kennt, die für einige Fälle gemessen wurden und wiedergegeben sind.

I. Einleitung

In einer früheren Notiz²⁾ haben wir die Möglichkeit diskutiert, zur Messung instationärer Zustände der Gasdichte die Absorption von Korpuskularstrahlen zu benützen, insbesondere im Bereich kleiner Absolutwerte der Dichte.

In diesem Zusammenhang wurde ein Verfahren entwickelt, intensive Korpuskularstrahlbündel geringer Partikelenergie aus dem Vakuum ohne Einschaltung von Folienfenstern in Gase einzuschießen³⁾. Ein Teil der damit aufgenommenen Untersuchungen befaßte sich mit den Schwächungsgesetzen und der Ausbreitung von Elektronenbündeln in Gasen homogener Dichte. Diese Messungen werden an anderer Stelle ausführlich dargestellt und diskutiert.

In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß mit Hilfe der entwickelten Apparatur auch die direkte Abbildung inhomogener Dichtefelder z. B. von Gasströmungen bei geringen Drucken möglich ist, bei denen lichtoptische interferometrische Methoden versagen. Es läßt sich zeigen, daß die so gewonnenen Abbildungen eine quantitative Bestimmung der Gasdichte zulassen; dazu werden im folgenden zunächst die Verhältnisse für Elektronenbündel in Gasstrecken homogener Dichte kurz dargestellt. Die Abbildung inhomogener Dichtefelder erfordert dann eine besondere Betrachtung im Hinblick auf die Tatsache, daß infolge der Diffusität der Elektronen die Abbildung gewissermaßen eine Abbildung im trüben Medium ist.

In ein Gas eingeschossene Elektronen erleiden bekanntlich durch Wechselwirkung mit den Gasmolekülen längs ihres Weges Energieverluste und werden gestreut. Ein Parallelstrahlenbündel von Elektronen erfährt als Ganzes eine ge-

¹⁾ Dissertation, Stuttgart; 2. Teilveröffentlichung.

²⁾ E. Schopper, B. Schumacher, Z. Naturforschg. 6a, 700 (1951).

³⁾ B. Schumacher, Optik 10, 116 (1953) — Dissertation, Stuttgart, 1. Teilveröffentlichung.

wisse „Streuabsorption“, es verbreitert sich pinselförmig; schließlich verteilen sich die Elektronen diffus über einen nahezu kugelförmigen Raum, der etwa den Durchmesser der „Reichweite“ hat. Abb. 1 zeigt diese Verhältnisse an Elektronenbündeln, die als Parallelstrahlen in Normalluft eingeschossen werden. Die Luft leuchtet im gesamten Bereich, in den Elektronen gelangen, blauviolett. Die Leuchtgrenze ist sehr scharf und fällt mit derjenigen Grenze zusammen, ab der auch ein Leuchtschirm kein durch Elektronen erregtes Leuchten mehr zeigt. Die Elektronen traten aus einem Loch am Ende eines dünnen Rohres aus; man sieht deutlich die Rückstreuung bis hinter die Austrittsstelle. Die Abmessungen dieses „Elektronenpinsels“ hängen von der Energie der Elektronen und von der Gasdichte ab; umgekehrt kann letztere aus der Elektronen-Streuabsorption bestimmt werden. Ein Einfluß der Ordnungszahl des Gases ist vorhanden, aber gering⁴⁾; außerdem hängt z. B. die primär beobachtete Reichweite bei stromstarken Strahlen etwas von der Intensität ab, da das Gas vom Strahl aufgeheizt wird.

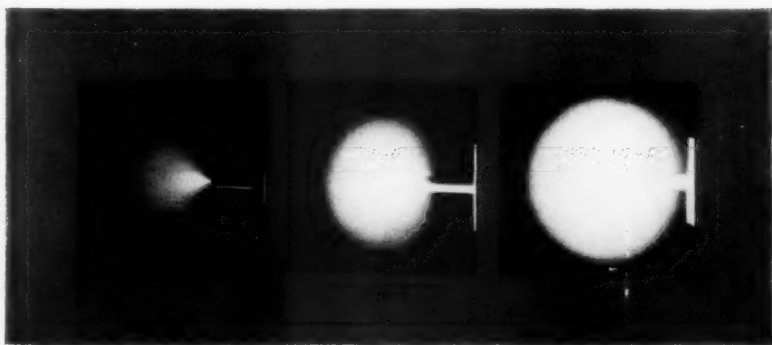


Abb. 1. Elektronen-Streukugel beim Eintritt eines parallelen Elektronenbündels von 60 keV in Normalluft. Aufnahme des Luftleuchtens, Kopien vom gleichen Negativ mit Variation der Belichtungszeit im Verhältnis 1,5:5:50 zur Kennzeichnung der Isophoten

II. Vorbetrachtung: Die Schwächung eines Elektronenstrahls im homogenen Dichtefeld

Empfindlichkeit, Meßgenauigkeit und geometrisches Auflösungsvermögen bei Sondenmessungen

Für die Messung der Gasdichte mit Elektronen im homogenen Dichtefeld ergab sich eine Anordnung nach Abb. 2. Aus einer durch eine feine Blende gebildeten Einschußöffnung tritt ein zunächst paralleles Bündel von Elektronen in den Meßraum. Der Einschußöffnung gegenüber befindet sich in der Entfernung s ein kleiner Auffänger, z. B. ein Faraday-Käfig. Die damit aus dem Bereich der Streukugel (Abb. 1) aufgefangene Intensität, die Teilchenzahl, stellt ein eindeutiges Maß für die längs der Meßstrecke s homogene Gasdichte ρ dar, wenn Anfangsenergie und -intensität der Elektronen bekannt sind. Dies hängt mit der durch den Auffänger bewirkten Ausblendung einer „Sonde“ zusammen und dem

⁴⁾ O. Klemperer, Einführung in die Elektronik. Berlin 1933 (Zusammenfassende Darstellung).

speziellen Schwächungsmechanismus bei Elektronen; einen Vergleich mit den Verhältnissen etwa bei Ionensonden bringt unsere frühere Notiz⁵⁾).

Für Elektronenbündel können wir im Anschluß an experimentelle Untersuchungen von folgendem, für unser Meßproblem wesentlichen empirischen Sachverhalt ausgehen:

Im Vakuum würden alle aus der Einschußöffnung austretenden Elektronen den Auffänger treffen; der so gemessene Strom sei I_{00} . Im Gas erleiden die Elektronen durch Wechselwirkung mit den Gasmolekülen vorwiegend Streuung ohne

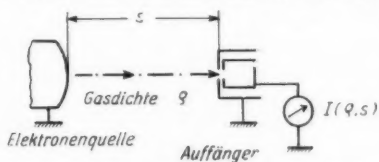


Abb. 2a. Schema der Anordnung für Elektronen-Sondenmessungen der Gasdichte

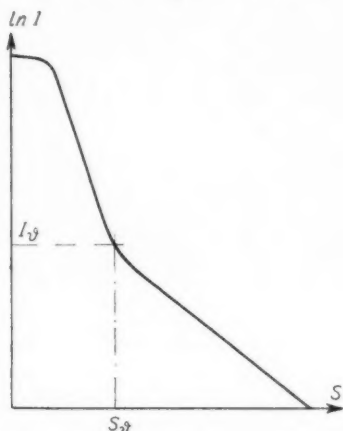


Abb. 2b. Verlauf der Intensität längs s ; schematisch

wesentlichen Energieverlust. Dies erlaubt es, die Gasdichte aus der Intensitätsabnahme allein, also durch Stromstärkemessung zu bestimmen. Mißt man mit einem Auffänger — der größer als die Einschußöffnung für die Elektronen sein kann — den Sondenstrom $J = J(s)$ längs des Weges s , Abb. 2b, bei $s = 0$ beginnend, und bei konstanter Dichte ρ im Meßfeld, so bleibt auf eine kurze Strecke der gemessene Strom konstant, solange noch alle gestreuten Elektronen den Auffänger treffen, dann erfolgt ein steiler Intensitätsabfall bis zu einer Stelle $s = s_0$, da nunmehr Elektronen aus dem vom Auffänger erfaßten Sondenbereich herausgestreut werden. Ab $s = s_0$ wird der Intensitätsabfall wesentlich flacher, denn es wird jetzt in der Kernzone eines sogenannten vollständig diffusen Strahls gemessen. (Vergleiche die $J(s)$ -Kurve in unserer früheren Mitteilung⁶⁾, die auch die Intensitätsverteilung quer zur s -Richtung zeigt.) Es gilt dann in guter Näherung ein exponentielles Schwächungsgesetz

$$J(s) = J_0 \exp [-\alpha_\rho(\epsilon) \cdot (s - s_0)], \quad (1)$$

wobei J_0 die Intensität bei $s = s_0$ sein möge, und $\alpha_\rho(\epsilon)$ der sogenannte praktische Absorptionskoeffizient zur Dichte ρ und der Elektronenenergie ϵ ist, wie er in der Literatur angegeben wird; er ist für ein bestimmtes Gas streng proportional der Dichte. Der Massenabsorptionskoeffizient $\alpha_0(\epsilon) = \alpha_\rho(\epsilon)/\rho$ ist tabelliert⁷⁾ und in Abb. 3 als Funktion der Elektronenenergie in Kurvenform wiedergegeben.

Bei einer festen Meßstrecke der Länge $s_0 > s_0$, kann die Anordnung nach Abb. 2 zur Messung von Dichteschwankungen geeicht werden. Es wurde gefunden, daß

⁵⁾ E. Schopper, B. Schumacher (l. c.).

⁶⁾ Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen. Heidelberg 1925.

⁷⁾ F. Kohlrausch, Praktische Physik, 19. Auflage, Leipzig u. Berlin 1944, Bd. 2, Tabelle 48.

auch in diesem Fall ein einfaches Exponentialgesetz gilt, und zwar mit demselben Massenabsorptionskoeffizienten wie oben, der eigentlich seiner Definition nach nur für den diffusen Strahlbereich gilt und nicht für ein parallel eingeschossenes Elektronenbündel. Das bedeutet, daß in Gl. (1) der Faktor

$$J_0^* = J_0 \exp [\alpha_0(\varepsilon) \cdot (\varrho \cdot s)_0] \quad (2)$$

bei Dichtevariation in weiten Bereichen konstant bleibt, was auch aus Messungen der Intensität längs des Weges s direkt bestätigt werden konnte⁸⁾.

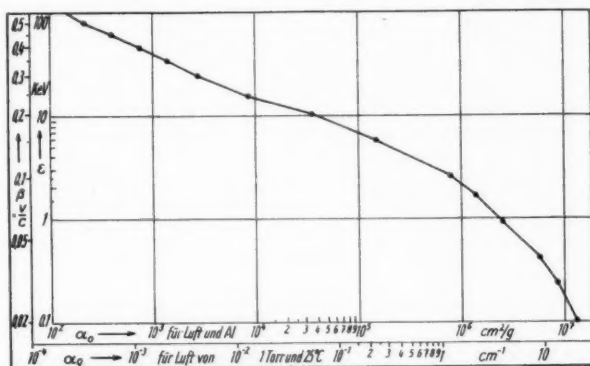


Abb. 3. Praktische Absorptionskoeffizienten für Elektronen (nach Lenard)

Damit nimmt auch für den Fall des parallel eingeschossenen Elektronenbündels das Schwächungsgesetz bei Dichtevariation die einfache Form an

$$J = J_0^* \exp - \alpha_0(\varepsilon) \cdot s_0 \varrho. \quad (3)$$

Aus zwei Meßwerten J_1 und J_2 erhält man damit als zugehörige Dichtevariation $\Delta \varrho = \varrho_2 - \varrho_1$

$$-\Delta \varrho = \frac{1}{\alpha_0 s_0} \ln J_2/J_1 \quad (4)$$

oder für kleine Änderungen

$$-\Delta \varrho = \frac{1}{\alpha_0 s_0} \frac{\Delta J}{J} \quad (5)$$

bzw.

$$-\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = \frac{1}{\alpha_0 \cdot s_0} \frac{\Delta J}{J}. \quad (6)$$

Da man nun den Schwächungskoeffizienten α_0 bzw. α_0 in weiten Grenzen einfach durch Variation der Elektronenenergie ε frei wählen kann, kann man für jeden Absolutwert der Gasdichte, bei dem Dichteschwankungen gemessen werden sollen, die gleiche relative Meßgenauigkeit erzielen. Für Messungen im Bereich geringer Dichten und für kurze Meßstrecken sind dazu Elektronenbündel geringer Partikelenergie erforderlich, wie sie die von uns entwickelte Apparatur zu liefern vermag. Als Anwendungsbeispiele seien Messungen in Unterdruck-Windkanälen erwähnt,

⁸⁾ K. Finkewirth, Diplomarbeit, Stuttgart 1953.

wo bislang gewisse Schwierigkeiten bestehen, die Strömungen etwa licht-interferometrisch sichtbar zu machen⁹⁾, wie auch bei Dichtemessungen in Raketenflammen¹⁰⁾.

An einem Zahlenbeispiel seien die Verhältnisse noch einmal erläutert und mit denen beim Lichtinterferometer verglichen.

Bei einer Meßstrecke von $s_0 = 6$ cm und einer Dichte $\varrho_0 = 4,7 \cdot 10^{-6}$ g/cm³ (entsprechend einem Druck von $p_0 = 3$ Torr bei Luft von 25° C) ergibt sich mit $\varepsilon_0 = 5$ keV, $\alpha_g = 0,9$ cm⁻¹

$$\frac{\Delta J}{J} = -5,4 \frac{\Delta \varrho}{\varrho}.$$

Nun kann ein Sondenstrom von $I_0 = 10^{-9}$ Amp. noch bequem auf 1% genau gemessen werden; damit sind Dichteänderungen von 0,2% oder in diesem Fall von $9,4 \cdot 10^{-9}$ g/cm³ (entsprechend einer Druckänderung $p = 0,006$ Torr) oder einer Änderung der Schichtdicke $\mu = \varrho \cdot s$ von $0,57 \cdot 10^{-7}$ g/cm² sicher meßbar.

Für das Interferometer sei angenommen, daß eine Streifenverschiebung von $\frac{1}{10}$ der Streifenbreite noch ablesbar sei. Diese wird hervorgerufen durch eine Änderung der optischen Weglänge $k = n \cdot s_0$ in einem der interferierenden Strahlenbündel um $\Delta k = \frac{1}{10} \lambda$ (n = Brechungsindex des Gases, λ = Wellenlänge des verwendeten Lichts). Es ist also noch nachweisbar $\Delta n = 0,1 \lambda / s_0$. Für Luft ist $(n-1) = \zeta \varrho$ mit $\zeta = 0,226$ cm³/g. Daraus folgt mit $\lambda = 5 \cdot 10^{-6}$ cm

$$\Delta \mu_{\min} = s_0 \Delta \varrho_{\min} = \frac{0,1 \lambda}{\zeta} = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ g/cm}^2.$$

Die Elektronensonde ist also in obigem Beispiel 2 Größenordnungen empfindlicher.

Eine weitere Empfindlichkeitssteigerung, etwa durch Vergrößerung des Faktors $\alpha \cdot s_0$ in Gl. (6) ist nur bedingt möglich, denn I_0 sinkt dann stark ab und kann weniger genau gemessen werden. Die Einschußintensität I_{00} zu erhöhen, ist wegen der Erwärmung des Gases durch den Sondenstrahl selbst auch nur begrenzt möglich. Wie an anderer Stelle noch ausführlich gezeigt werden soll, blieb diese Gasaufheizung vernachlässigbar, solange $I_{00} \lesssim 10^{-7}$ Amp. war.

Zur Strommessung hat sich ein kleiner Faradaykäfig bewährt, falls die Messung niederohmig, also mit einem Galvanometer oder in einer Kompensationsschaltung erfolgt, die verhindert, daß der Auffänger gegenüber den Wänden des Meßraumes bzw. gegen seine Abschirmung eine Potentialdifferenz von mehr als 0,01 bis 1 V erhält und damit Ionen einfängt. (Durch eine willkürlich erteilte Potentialdifferenz kann dieses kritische Potential jederzeit bestimmt und die Zuverlässigkeit der Messung geprüft werden; in einem von uns verwendeten „kompensierenden“ Meßverstärker war eine entsprechende Einrichtung eingebaut.

In manchen Fällen kann ein Luminophor in Verbindung mit einer Photozelle als Auffänger Messungen bei noch schwächeren Sondenströmen und extremer Empfindlichkeit erlauben, doch ist diese Anordnung gegen Temperatur und Fremdlicht empfindlich, so daß sie z. B. für Messungen in Flammgasen kaum in Frage kommt.

Von Interesse ist noch die untere Grenze der Dichte, bis zu der das Verfahren brauchbar ist. Für Elektronen von $\varepsilon_0 = 100$ eV ist $\alpha_0 = 1,5 \cdot 10^7$ cm²/g, womit im Sinn der obigen Überlegungen in einer Schicht von $0,67 \cdot 10^{-7}$ g/cm² noch Messungen möglich wären. Bei 6 cm langer Meßstrecke entspricht dies einer Dichte von $1,1 \cdot 10^{-8}$ g/cm³ oder: bei Luft von 25° C, einem Druck von $7 \cdot 10^{-3}$ Torr; mit $\varepsilon_0 = 500$ eV ergeben sich die Werte $3 \cdot 10^{-8}$ g/cm³ bzw. $2 \cdot 10^{-2}$ Torr.

⁹⁾ W. Wuest, Umschau 50, 425 (1950).

¹⁰⁾ F. P. Bundy, H. M. Strong, A. B. Gregg, J. appl. Phys. 22, 1069 (1951).

Es war bis jetzt vorausgesetzt, daß die Gasdichte im Bereich der Sonde konstant ist. Was dabei als „Bereich“ der Sonde anzusehen ist, gewissermaßen ihr Einzugsgebiet, aus dem Elektronen zum Auffänger gelangen, wurde noch nicht näher festgelegt. Als Folge der Streuung gelangen ja nicht nur aus dem Bereich des Kegelstumpfs, der durch Elektronenquelle und Auffänger gegeben ist, Elektronen zum Auffänger, sondern auch aus einer daran anschließenden Zone. Wir haben den Querschnitt der Sonde, einschließlich dieser Zone, den „Trübungsquerschnitt“ genannt, da die Verhältnisse qualitativ dem Durchgang von Licht durch trübe Medien entsprechen, wenn auch quantitativ wegen des Energieverlusts der Elektronen keine Analogie vorhanden ist. Der Durchmesser dieses Trübungsquerschnitts beträgt größenordnungsmäßig das Doppelte der Rückdiffusionsdicke für die Elektronen (zur Rückdiffusionsdicke vgl.¹¹⁾).

Eine Streutheorie, an Hand derer der Trübungsdurchmesser genauer errechnet werden könnte, existiert bislang nicht. Es ist jedoch nicht schwierig, ihn jederzeit für den jeweils verwendeten Auffängerdurchmesser usw. experimentell zu bestimmen, indem man den Sondenstrahl zentral durch eine zwischen Auffänger und Quelle liegende Irisblende gehen läßt, den Sondenstrom bei weit offener Blende mißt und diese anschließend so weit verengt, daß ein Stromabfall von 0,1%, 1%, ... 10% entsteht. Die jeweiligen Blendendurchmesser $\tau_{0,1}, \tau_1, \dots, \tau_{10}$ kann man dann als die Trübungsdurchmesser am Ort der Blende bezeichnen, in dem Sinn, daß der außerhalb τ liegende Bereich in die Meßgenauigkeit mit einem Beitrag von 0,1%, 1%, ... 10% eingeht. Sie sind durch obige Meßvorschrift streng definiert.

Aus Messungen, wie sie Abb. 5 (Abschn. III) zeigt, kann man, wenn man die Objektgröße b variiert, τ ebenfalls entnehmen. Systematische Meßreihen liegen noch nicht vor. In Analogie zu den Verhältnissen bei der Schattenabbildung (Abschn. III) wird der Trübungsquerschnitt mit abnehmender Elektronenenergie, also zunehmender Empfindlichkeit der Sonde, größer.

Für den Fall $s_0 = 64$ mm, $\varepsilon_0 = 23$ keV, $\varrho = 3,9 \cdot 10^{-6}$ g/cm² (Luft, 25° C, 2,5 Torr), also $\alpha_0 \cdot s_0 \approx 1$ und einem Auffänger mit 1,2 mm Durchmesser wurde gefunden: $\tau_5 < 4$ mm, für $s_0 > s > 0$. Bei $\varepsilon = 12,5$ keV und sonst gleichen Verhältnissen, also $\alpha_0 \cdot s_0 \approx 5$, war noch $\tau_{20} < 4$ mm Durchmesser.

Diese Trübungsdurchmesser kennzeichnen also das Einzugsgebiet der Sonde; wenn ein größeres Dichtefeld abgetastet wird, ihr geometrisches Auflösungsvermögen. Wie in Abschnitt III gezeigt wird, ist das geometrische Auflösungsvermögen bei der Schattenabbildung wesentlich besser, da die Halbwertsbreite der Schatten immer ziemlich genau der Objektgröße entspricht.

Beispiele für Sondenmessungen, damals noch mit geringerer Meßgenauigkeit, als wir sie heute erzielen können, brachte unsere frühere Mitteilung¹²⁾.

III. Schattenabbildung und Ausmessung inhomogener Dichtefelder

a) Allgemeines

Zunächst erscheint eine Abbildung mit diffusen Elektronenstrahlen überhaupt unmöglich. Man hat sich jedoch vorzustellen, daß zu jedem Punkt innerhalb der Elektronen-Streukugel, wie sie Abb. 1 zeigt, ein ähnlicher Strahl-

¹¹⁾ Landolt-Börnstein, Zahlenwerte und Funktionen, 6. Aufl. I. Bd., 5. Teil, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1952, Artikel von Paul und Frank.

¹²⁾ E. Schopper, B. Schumacher (l. c.).

pinselförmig gehört, wie er an der Austrittsstelle der Elektronen ebenfalls in Abb. 1 zu sehen ist. Die Richtungsablenkung der Elektronen bleibt über kleine Strecken klein. Ein undurchsichtiges Objekt wirft also durchaus einen Schatten, der dann lediglich durch Elektronen aus der Nachbarschaft des Schattenzylinders wieder aufgehellt wird.

Unsere frühere Mitteilung¹³⁾ brachte als Beispiel das Elektronenschattenbild einer Wasserstoffströmung bei Normaldruck. Dort stand, wie auch bei den Bildern dieser Arbeit, ein Leuchtschirm senkrecht zur Einschußrichtung der Elektronen. Es können jedoch auch Schattenbilder erhalten werden, wenn der Leuchtschirm die Streukugel in irgendeiner anderen Lage schneidet. Die Richtung, in der der Schatten, z. B. einer kleinen Kugel, dann entsteht, gibt die wahrscheinlichste Elektronenbahn am Ort des Objektes, der Schattenkontrast liefert ein Maß für die Steilheit der Richtungsverteilungskurve. Mit einem kleinen Indikator, bestehend aus einem Kügelchen und einem Leuchtschirm in geringem Abstand, kann man die wahrscheinlichste Elektronenbahn verfolgen, wenn man sich dauernd in Schattenrichtung weiter bewegt.

Es sei jetzt die Frage diskutiert, was geschieht, wenn das abzubildende Objekt nicht undurchsichtig ist, sondern nur einen Teil der einfallenden Elektronen absorbiert bzw. streut im Sinn der Darstellung des vorhergehenden Abschnitts.

b) Anordnung zur Schattenabbildung mit einer punktförmigen Elektronenquelle; Gesichtsfeld und Helligkeitsverteilung im Gesichtsfeld

Als Elektronenquelle diene wieder die Austrittsdüse einer Druckstufenstrecke. Davor, in der Entfernung s_0 , stehe ein Leuchtschirm. Er schneidet den Elektronenpinsel senkrecht zur Strahlachse und wird von den auftreffenden Elektronen auf einer kreisförmigen Fläche erhellt. Bei Gasdrucken zwischen 1 Torr und 20 Torr und Elektronenenergien von etwa 3 keV bis 25 keV und einer Entfernung $s_0 = 65$ mm ergibt sich ein gleichmäßig helles Gesichtsfeld von etwa 20 mm Durchmesser. Bis zu einem Gesichtsfelddurchmesser von etwa 40 mm sind immer noch Schattenbilder zu beobachten, nur nimmt dann die Gesichtsfeldhelligkeit, besonders bei schnelleren Elektronen, nach außen ab. Bei visueller Beobachtung stört dieser Helligkeitsunterschied kaum, er macht es jedoch schwierig, die Leuchtschirmbilder zu photographieren. Er bedeutet eine Variation der Helligkeit im Gesichtsfeld von etwa 1:10, im eigentlichen Objekt von etwa 1:1,2. Zum Helligkeitsausgleich wurde deshalb ein Graukeilleuchtschirm verwendet, der in folgender Weise hergestellt war: Ein gewöhnlicher Durchsichtleuchtschirm wurde bei geeigneter Gasdichte und Elektronenenergie bei „leerem“ Gesichtsfeld von außen im Maßstab 1:1 photographiert. Auf das entstandene Negativ wurde wieder Leuchtstoff aufgebracht¹⁴⁾ und dieser Graukeilleuchtschirm in die Apparatur eingesetzt. Durch einen rotierenden Sektor oder eine vignettierende Blende kann beim Kopieren ein

¹³⁾ B. Schumacher, l. c.

¹⁴⁾ Leuchtstoff K 4/grün 2 (5μ) der Heidelberger Leuchtstoffwerke in Wasser aufgeschwemmt und sedimentiert auf die Gelatine der Photoplatten, haftet dort ohne weiteres Bindemittel. Zusatz von einem Spannungsmittel zum Wasser erleichtert das Sedimentieren ohne Bildung von Rändern. Für die Durchsichtbeobachtung wäre es wünschenswert gewesen, noch homogenere Leuchtschirme zu erhalten. Sicher lassen sich mit Einkristall-Leuchtschirmen oder organischen Leuchtschirmen¹⁵⁾ noch bessere Bilder erzielen.

¹⁵⁾ W. Hanle, Phys. Verhandlungen 3, 207 (1952).

weiterer Ausgleich vorgenommen werden. Die Bilder Abb. 8, 11, 12 sind ohne, die anderen mit Graukeilleuchtschirm aufgenommen¹⁶⁾.

Ein größeres und homogeneres Gesichtsfeld wäre vielleicht in der Weise zu erhalten, daß man die ersten kleinen Streuwinkel der Elektronen im Gas durch eine kurzbrennweitige magnetische Linse stark vergrößert und so einen weit geöffneten Strahlkegel schafft. Für noch größere Felder könnte man mehrere Elektronenquellen in etwa 25 mm Abstand voneinander anordnen. (Bei 5 parallelen Systemen mit je 0,1 mm Düsendurchmesser würden die jetzt verwendeten Vakuumpumpen noch ausreichen.)

Mit einem elektronenoptisch aufgeweiteten Strahlkegel wäre speziell zu untersuchen, ob es Vorteile bringt, im Strahlbereich $s_0 < s_g$ zu arbeiten, auch wenn hier nicht, wie beim Elektronenmikroskop, die gestreuten Elektronen durch Aperturblenden weggefangen werden können.

c) Kontrast und geometrisches Auflösungsvermögen der Abbildung

Wie in Abb. 4 gezeichnet, treffe auf den Leuchtschirm ein diffuser Strom von Elektronen mit Vorzugsrichtung senkrecht zum Leuchtschirm. In einer Entfernung t_s vom Leuchtschirm befinde sich ein kleines Objekt, der Einfachheit halber als kreisrunder Zylinder vom Durchmesser b und der Tiefe l angenommen, das eine von ϱ_0 um $\Delta\varrho$ abweichende Dichte habe. Es kann b beliebig, auch kleiner als der vorn definierte Trübungsdurchmesser τ sein (s. Abschnitt II), doch sei $l < t_s$, $t_s < s_0$ und $(s_0 - t_s) > s_g$.

In der Ebene t_s herrsche die Stromdichte j_0 , am Leuchtschirm, fern vom Objektschatten, die Stromdichte j_l , im geometrischen Objektschatten, dem Bildpunkt, die Stromdichte j_B .

Diese Bildpunkthelligkeit j_B kann man sich nun aus verschiedenen Anteilen bestehend denken. Der erste Anteil j_{Bd} sei derjenige, der von direkt durchs Objekt gegangenen Elektronen stammt, seine Größe diejenige, die sich mit $b \rightarrow \infty$ ergeben würde, gemäß den Überlegungen in Abschnitt II. Infolge der endlichen Größe von b werden aber nun über die Mantelfläche der geometrischen Schattenzone hinweg nicht gleich viele Elektronen hinaus wie herein gestreut. Der Anteil von j_{Bd} , der hinausgestreut wird, verloren geht, und nicht mehr zum Bildpunkt gelangt, betrage j_{Bv} ; derjenige Anteil von j_l , der, von außen eingestreut, den Bildpunkt trifft, sei j_{Bs} ; also:

$$j_B = j_{Bd} - j_{Bv} + j_{Bs}. \quad (7)$$

Nun ist j_{Bv} proportional zu j_{Bd} und j_{Bs} zu j_l . In erster Näherung darf der gleiche Proportionalitätsfaktor T angenommen werden, der aber seinerseits von der Elektronenenergie, der Gasdichte, der Objektgröße und der Objektentfernung vom Leuchtschirm abhängt, so daß erwartungsgemäß die Kontrastverminderung oder Trübung der Abbildung eine Funktion aller dieser Parameter ist, also

¹⁶⁾ Es ließ sich dabei nicht in allen Fällen vermeiden, daß ringförmige hellere und dunklere Zonen auf den Bildern zu sehen sind. Sie haben mit den Gasströmungen, die abgebildet sind, nichts zu tun.

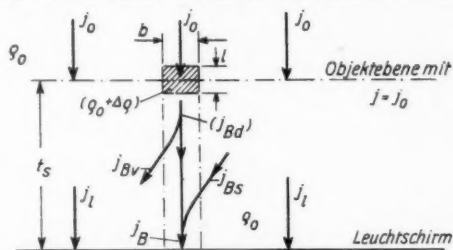


Abb. 4. Zur Ermittlung der Bildpunkt-Stromdichte j_B

$T = T\{\alpha_0(\varepsilon), \varrho_0, b, t_s\}$. Es interessiert hauptsächlich $T = T(t_s)$ bei Konstanz der anderen Parameter, also die Abhängigkeit der Trübung von der Objekttiefe, mit anderen Worten, die Tiefenschärfe der Abbildung; ferner interessiert $T = T\{\alpha_0(\varepsilon)\}$, die Abhängigkeit der Trübung von der Elektronenenergie, woraus sich die Grenzen der Meßgenauigkeit ergeben.

Es folgt aus (7):

$$\dot{j}_B = \dot{j}_{Ba} + (\dot{j}_i - \dot{j}_{Ba}) T. \quad (8)$$

Für ein undurchlässiges Objekt wird $\dot{j}_{Ba} = 0$ und

$$T(\alpha_0, \varrho_0, b, t_s) = \dot{j}_B / \dot{j}_i. \quad (9)$$

Für ein vollkommen durchlässiges Objekt, zugleich aber $\dot{j}_i = 0$, ergibt sich:

$$(1 - T) = \dot{j}_B / \dot{j}_{Ba}. \quad (10)$$

Dieser letztere Fall kann realisiert werden, indem in der Ebene t_s eine undurchlässige Folie mit einem Loch als „Objekt“ angebracht und t_s variiert wird. \dot{j}_{Ba} ist dann die Bildpunkthelligkeit für $t_s = 0$.

Die Trübungsfunktion T kann an Hand dieser Sonderfälle experimentell bestimmt werden, wobei, wie man leicht überlegt, eine Übereinstimmung der Messungen nach beiden Methoden anzeigt, daß keine geometrischbedingten, Fehler z. B. inhomogene Stromdichte, die Messung beeinflusst haben.

Nun gilt weiter, analog zu den in Abschnitt II beschriebenen Verhältnissen, wie man nach (3) und Abb. 4 herleitet:

$$\dot{j}_{Ba} = \dot{j}_i \exp[-\alpha_0(A_Q \cdot l)] \quad (11)$$

und damit für den Kontrast k

$$k = \frac{\Delta \dot{j}}{\dot{j}} = \frac{\dot{j}_B - \dot{j}_i}{\dot{j}_i} = (1 - T) \{ \exp[-\alpha_0 A_Q l] - 1 \}. \quad (12)$$

Bei kleinen Änderungen $A_Q l$ kann man näherungsweise schreiben

$$k = (1 - T) [-\alpha_0(A_Q l)] = k' \cdot (A_Q l), \quad (13)$$

wo dann mit T auch die Kontrastfunktion $k' = -\alpha_0(1 - T)$ als Funktion von $\varepsilon_0, \varrho_0, b, t_s$ bekannt ist, also aus einem gemessenen Kontrast k auf $A_Q l$ geschlossen werden kann, wenn diese anderen Parameter bekannt sind.

Um die Objektgröße b aus dem Bild zu bestimmen, muß die Verbreiterung des Schattens mit wachsender Entfernung t_s bekannt sein. Man überlegt an Hand der Abb. 4 leicht, daß für ein undurchsichtiges Objekt das Schattenbild breiter werden muß, als der geometrische Schatten. Zusammen mit der Trübungsfunktion wurde nun die Schattengröße und -halbwertsbreite in folgender Weise bestimmt:

Vor einem abgeschirmten Faraday-Käfig mit einem Lochdurchmesser von 1,2 mm als Auffänger (an Stelle des Leuchtschirms) wurde als Objekt ein Kupferblättchen von 1,4 mm Durchmesser in Richtung t_s und in der Richtung $t_b \perp t_s$ mikrometrisch auf 0,01 mm meßbar mittels eines vakuumdichten Kreuzschlittens verschoben. Das Blättchen wurde an einem Kupferdraht von 0,3 mm Durchmesser gehalten, dessen recht zu den Richtungen t_s und t_b stand, wie Abb. 5 schematisch zeigt. Die gleichen Messungen wurden mit einem Loch in einer Kupferfolie als Objekt gemacht.

Der Auffängerstrom als Funktion der Verschiebung wurde mit dem erwähnten Verstärker gemessen. Die Verhältnisse entsprechen dabei nicht ganz denen am Leuchtschirm, da der Auffänger nur einen Öffnungswinkel von 120° hatte gegen-

über den 180° des Leuchtschirms. Da dies jedoch für die Messung von j_B und j_L der Fall ist, dürfte der Fehler klein bleiben. Abb. 5 gibt ein Beispiel, Abb. 6 gibt die ganzen, für verschiedene Parameter p_m und ε_0 gemessenen $T(t_s)$ -Kurven

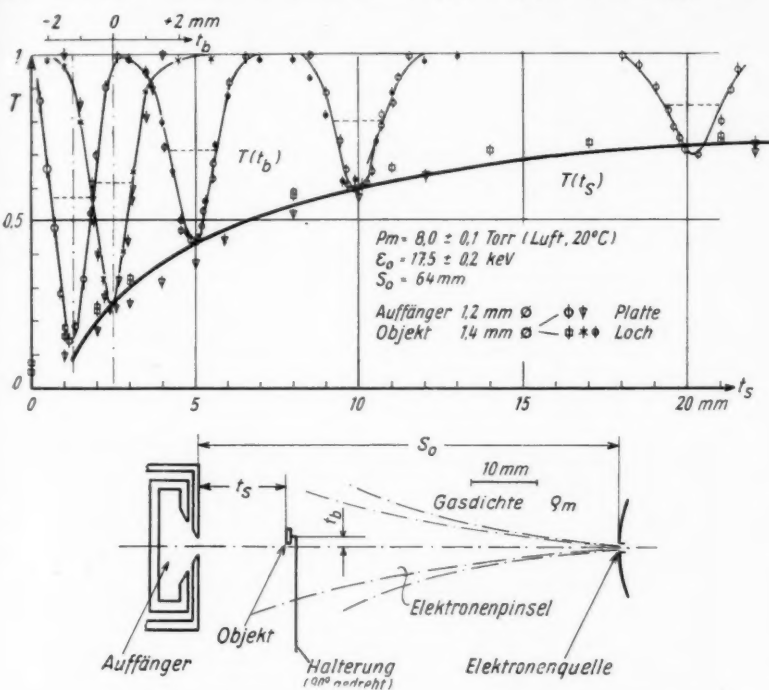


Abb. 5. Meßanordnung und Meßkurven zur Trübungsfunktion $T(\varepsilon, q, t)$

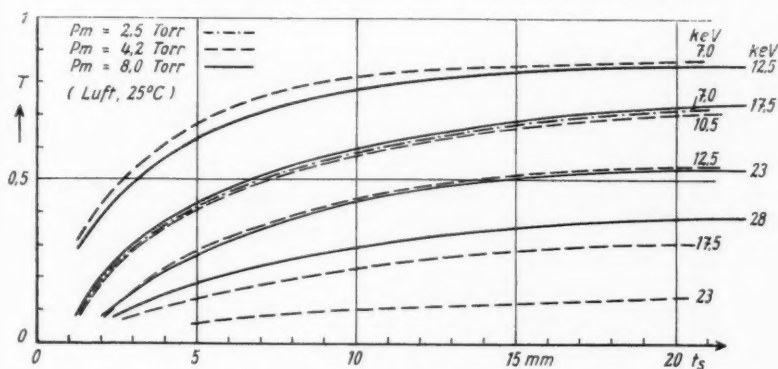


Abb. 6. Trübungsfunktionen $T(t_s)$

(Anordnung wie in Abb. 5). In Abb. 7 sind die gemessenen Werte in Funktion von ε aufgetragen und die Kurven zu kleinen Werten von ε extrapoliert. Es scheint nicht möglich, sie als Funktion eines einzigen Parameters allein darzustellen.

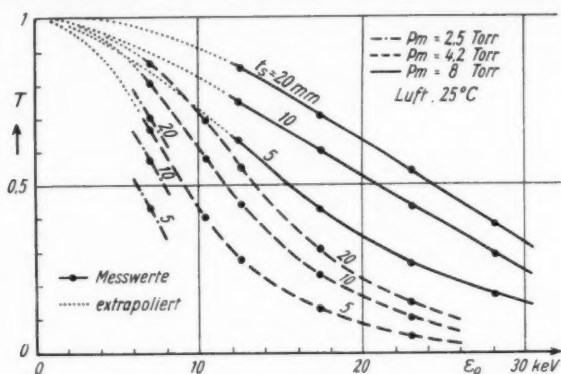


Abb. 7. Trübungsfunktionen $T(\varepsilon_0)$

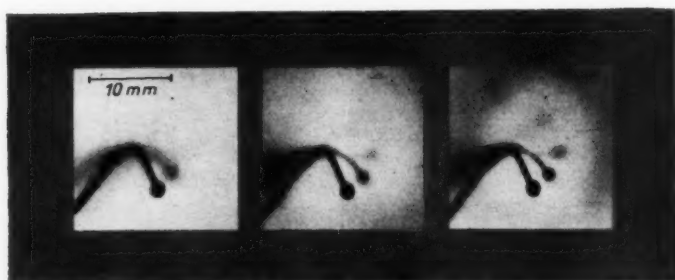


Abb. 8a. Elektronen-Schattenbilder eines Drahtgestells, $p_m = 1,0$ Torr.
(Luft, 20°C) $\varepsilon_0 = 3,0/5,0/7,0$ keV

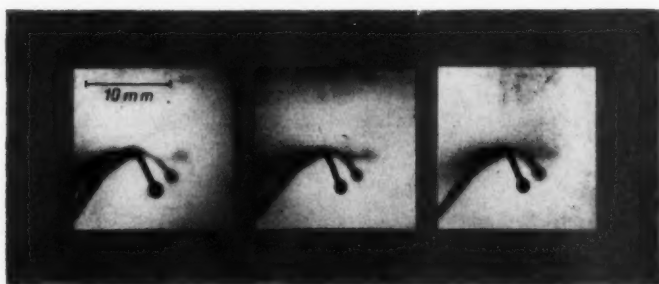


Abb. 8b. Elektronen-Schattenbilder eines Drahtgestells, von links nach rechts bei
 $p_m = 1,0 \quad 4,2 \quad 16$ Torr
 $\varepsilon_0 = 5,0 \quad 10,5 \quad 28$ keV

Ersichtlich nimmt der Kontrast für $\varepsilon = \text{const}$ mit wachsender Objektentfernung t_s erst rasch, dann langsamer ab; für $t_s = \text{const}$ wird der Kontrast mit kleinerer Elektronenenergie geringer. Die Halbwertsbreite des Schattens bleibt

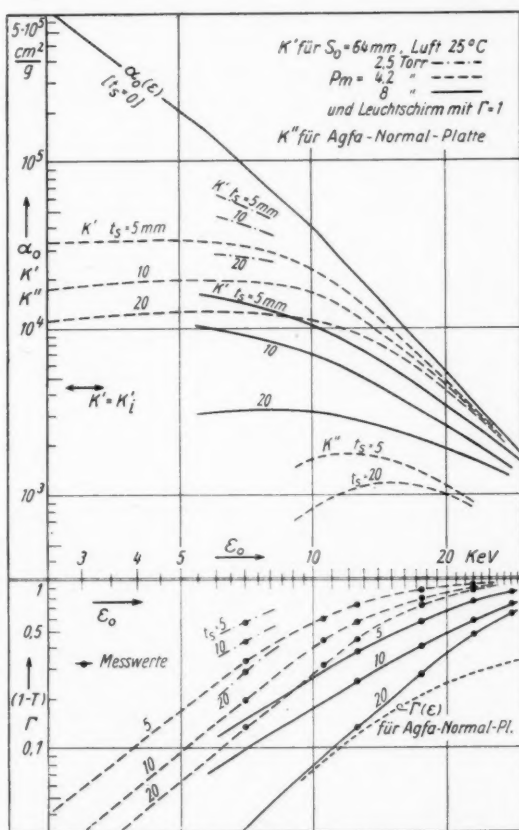


Abb. 9. Kontrastfunktionen für die Elektronen-Schattenabbildung von Gasdichteschlieren

überraschenderweise praktisch unabhängig von t_s (Abb. 5 ist typisch für alle Messungen).

Anschaulich demonstriert werden die Verhältnisse durch Abb. 8a, die das Schattenbild von 5 kleinen Kupferkugeln zeigt, die in verschiedenem Abstand t_s vom Leuchtschirm stehen (0/5/10/20/30 mm) und von Bild zu Bild mit Elektronen anderer Energie abgebildet sind, während Abb. 8b die optimale Anpassung der Elektronenenergie an den gegebenen Wert der Gasdichte demonstriert. Zur Erreichung einer großen Tiefenschärfe der Abbildung ist es, wie zu erwarten, zweckmäßig,

schnellere Elektronen zu verwenden. Andererseits wird dann aber die primäre Meßempfindlichkeit geringer, weil der Absorptionskoeffizient α_0 kleiner wird. Für jede Objektiefe t_0 ist ein gewisses Abbildungs-Optimum und eine gewisse maximalerreichbare Empfindlichkeit zu erwarten. Nach unseren Messungen kann diese nun zahlenmäßig angegeben werden. Dazu ist in Abb. 9 die Funktion $k' = -(1-T)\alpha_0(\epsilon)$ aufgetragen; danach ergibt sich die kleinste nachweisbare Schichtdicke zu

$$\Delta\mu_{\min} = (\Delta\varrho l)_{\min} = \frac{k_{\min}}{k'_{\max}}.$$

wobei der geringste nachweisbare Kontrast k_{\min} für Auffängermessungen bei $k_{\min} \approx 0,01$ liegt. Bei Leuchtschirmbeobachtung ist $k_{\min} \approx 0,1$, also viel ungünstiger. Innenaufnahmen mit photographischen Platten sind ganz unzweckmäßig, da die Schwärzungskurven für energiearme Elektronen eine ganz geringe Steilheit I' haben. Die Werte $k'' = I'k'$ sind in Abb. 11 miteingezeichnet (Werte aus ¹⁷⁾). Für den Leuchtschirm wurde $I' = 1$ angenommen.

Zum Vergleich mit dem Interferometer ist in Abb. 9 noch derjenige Wert $k' = k'_i$ eingezeichnet, der erreicht werden muß, wenn die interferometrisch noch nachweisbare Schichtdicke von $2,2 \cdot 10^{-5}$ g/cm² Luft mit einem Kontrast von $k = 0,1$ abgebildet werden soll. Wie man sieht, ist für $p_0 = 8$ Torr und für $t_s = 10$ mm, bzw. für 4 Torr und 20 mm der erreichbare Wert k_{\max} schon doppelt so groß als k'_i , d.h. auch die Leuchtschirmbeobachtung ist dem Interferometer noch überlegen; dies gilt erst recht bei kleineren Dichten.

Das Maximum der Funktion k' läßt sich leicht demonstrieren, indem man bei der Abbildung einer Gasströmung die Elektronenenergie variiert. Da das Maximum für k' sehr flach ist, hat man die Wahl, zwischen größerem Kontrast oder größerer Tiefenschärfe. Praktisch stellt man durch Variation von ϵ auf das detailreichste Bild ein und so wurde auch bei der Aufnahme der folgenden Bilder verfahren.

Die Grenze des Absolutwertes der Gasdichte, bis zu der herab solche Abbildungen möglich sind, liegt, wie vorn abgeschätzt, bei etwa 10^{-8} g/cm³ bzw. für Luft bei 10^{-3} Torr. Unterhalb dieser Dichte ist für kondensierbare Dämpfe eine Dunkelfeldabbildung anwendbar, wie sie Boersch ¹⁸⁾ beschrieben hat.

d) Beispiele für die Abbildung von Gasströmungen

Die Anordnung zur Beobachtung der Gasströmungen zeigt Abb. 10. Vor das in der früheren Arbeit ¹⁹⁾ abgebildete Korpuskularstrahlrohr wurde eine Kammer gesetzt, die den Leuchtschirm

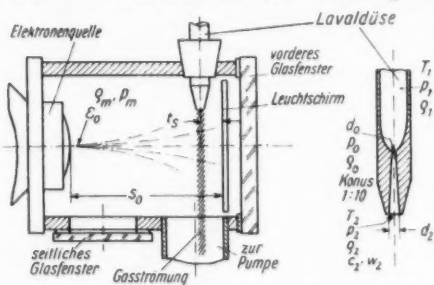


Abb. 10. Experimentelle Anordnung zur Abbildung von Gasströmungen mit Elektronen

enthält, die den Leuchtschirm enthält und vorn mit einer großen Glasplatte verschlossen ist, durch die hindurch der Leuchtschirm photographiert wurde. An einer Seite ist die Kammer mit einer kräftigen Pumpe des Typs „Leybold, S 150^{cc}“, verbunden, an der

¹⁷⁾ B. v. Borries, Übermikroskopie, Berlin 1949, S. 186, Abb. 95.

¹⁸⁾ H. Boersch, Z. Physik 107, 493 (1937).

¹⁹⁾ B. Schumacher (l. c.).

gegenüberliegenden Seitenwand sind die verschiedenen Düsen angesetzt worden, mit denen die im folgenden abgebildeten Gasstrahlen erzeugt wurden.

Zunächst zeigt Abb. 11 die Strömung durch eine von einem zerquetschten Rohr gebildete primitive Schlitzdüse mit $0,1 \cdot 10$ mm Querschnitt. Beim Drehen der Düse läßt sich visuell sehr gut die räumliche Struktur der Strömung erkennen,

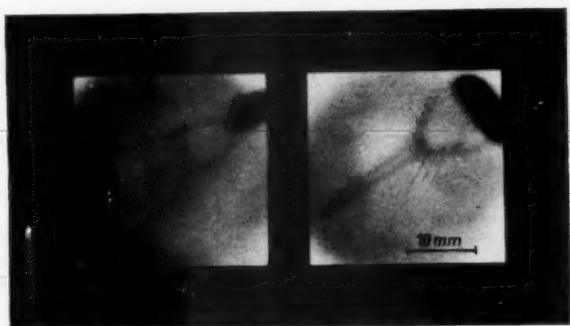


Abb. 11. Elektronen-Schattenbild der Luftströmung aus einer primitiven Schlitzdüse mit den Abmessungen $0,1 \cdot 10$ mm² (Hochkant und quer) $p_m = 5$ Torr, $p_1 = 1$ ata, $\varepsilon_0 = 17$ keV

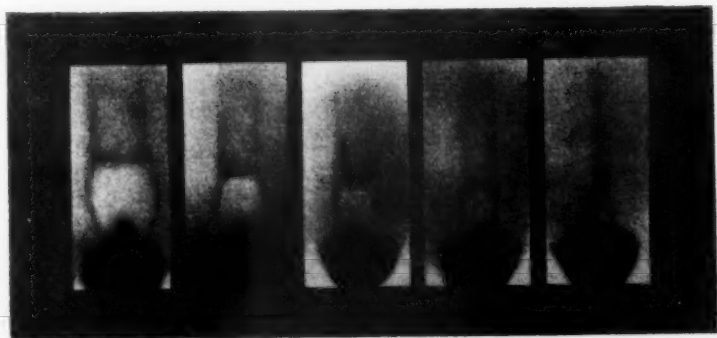


Abb. 12. Luftstrom aus einer zylindrischen Düse mit 1,0 mm Durchmesser auf 10 mm Länge. $p_m = 3,2$ Torr = const $\varepsilon_0 = 7,5$ keV = const.
 $p_1 = 600 / 500 / 400 / 300 / 200$ Torr

und damit die Tiefenlage t_s der verschiedenen Details des abgebildeten Objekts. Abb. 12 zeigt Beispiele von Strömungen aus Düsen, wie sie bei unseren Druckstufen Verwendung finden. Insbesondere ist der kleine und sehr dichte Luftstrahl dicht an der Düse interessant, der etwa dem früher²⁰⁾²¹⁾ mit der Sonde gemessenen Strahl entspricht.

²⁰⁾ E. Schopper, B. Schumacher, D. Knapp, Phys. Verhandlungen 2, 73 (1950).

²¹⁾ E. Schopper, B. Schumacher (l. c.).



$$\begin{aligned} p_1 &= 1,2 \text{ ata} \\ p_m &= 2,6 \text{ Torr} \\ \epsilon_0 &= 4,8 \text{ keV} \\ \rho_2 d_2^* &= 6 \cdot 10^{-6} \text{ g/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 &= 6 \text{ ata} \\ p_m &= 3,0 \text{ Torr} \\ \epsilon_0 &= 11 \text{ keV} \\ \rho_2 d_2^* &= 8 \cdot 10^{-6} \text{ g/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 &= 10^* \text{ ata} \\ p_m &= 4,0 \text{ Torr} \\ \epsilon_0 &= 15 \text{ keV} \\ \rho_2 d_2^* &= 1 \cdot 10^{-5} \text{ g/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 &= 16 \text{ ata} \\ p_m &= 4,7 \text{ Torr} \\ \epsilon_0 &= 15 \text{ keV} \\ \rho_2 d_2^* &= 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ g/cm}^2 \end{aligned}$$

Abb. 13. Stickstoffstrom aus einer Lavaldüse mit $d_0 = 0,31$ mm Durchmesser, $d_2 = 2,1$ mm Durchmesser; $t_s = 11$ mm. $\rho_2 d_2^*$ sind die Schichtdicken einer idealen parallelen Strömung beim jeweiligen Druckverhältnis p_1/p_m

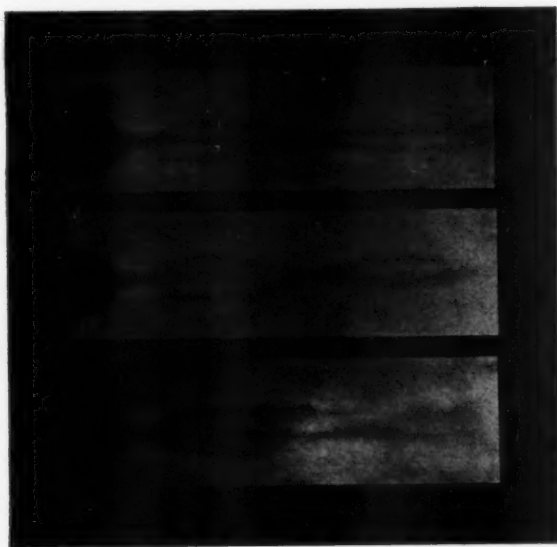


Abb. 14. Stickstoffströmung aus einer Lavaldüse mit $d_0 = 0,5$ mm Durchmesser, $d_2 = 2,1$ mm Durchmesser, $t_s = 11$ mm. $p_m = 3$ Torr, $p_1 = 4$ ata, $p_1/p_m = 1000$, Strömungsgeschwindigkeit $w_2 \approx 700$ m/sec Machsche Zahl $w_2/c_2 \approx 3,8$. Düse zur Demonstration der räumlichen Struktur der Strömung von Aufnahme zu Aufnahme um die Achse der Strömung verdreht.

Bei Überschallströmungen aus erweiterten Düsen (Laval-Düsen) kann man die Gasdichte und Schichtdicke wenigstens für die ideale parallele Strömung leicht berechnen. Abb. 13 zeigt solche Strömungen; die Schichtdicke für den Idealfall ist jeweils angegeben; in den einzelnen Zweigen der Strömung ist sie weit geringer.

Je nach dem Druckverhältnis bilden sich verschiedene Strömungsformen aus; durch Wandeinflüsse der Laval-Düse entstehen Inhomogenitäten (Abb. 14). Von einer solchen Strömung, die weit hinter dem Leuchtschirm und ungestört von diesem verlief, konnten durch Verdrehen der Laval-Düse um ihre Achse Stereoaufnahmen gemacht werden.

Schließlich zeigt Abb. 15 die Strömung um eine Kugel, die von der Laval-Düse angeblasen wird.

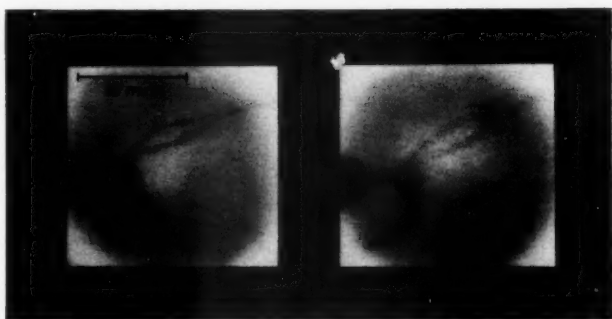


Abb. 15. Stickstoffströmung aus einer Lavaldüse mit $d_0 = 0,5$ mm Durchmesser, $d_2 = 2,1$ mm Durchmesser, $l_s = 10$ mm, $p_m = 3,8$ Torr, $p_1 = 5$ ata, $e_0 = 22$ keV, auf eine Kugel mit 1,9 mm Durchmesser auftreffend. Die Konturen sind hier nachgezogen, da der Kontrast im Original äußerst schwach ist. Visuell waren 9 Äste der Strömung sichtbar (Kugeloberfläche war rauh)

Für die oberste Aufnahme der Abb. 13, bei der die Schichtdicke der ungestörten Strömung $6 \cdot 10^{-6}$ g/cm² betragen würde, wäre nach dem Diagramm für die Kontrastfunktionen ein Wert $k' = 3 \cdot 10^4$ cm²/g zu erwarten, somit ein Kontrast $k = 0,2$, was dem Bild der Strömung an der Mündung der Düse auch entspricht. Ebenso erhält man für das 3. Bild einen Wert $k = 0,1$. Die Übereinstimmung ist befriedigend, wenn man bedenkt, daß es ziemlich schwierig ist, z. B. für elektronenmikroskopische Bilder die Massendicke der Objekte anzugeben. Genaue Werte für die Gasdichte lassen sich aus der photographischen Aufnahme, bei der der Kontrast noch durch die Schwärzungskurven beeinflußt wird, wohl nur dann entnehmen, wenn ein Testobjekt, ähnlich wie in Abb. 8, mitphotographiert wird. In manchen Fällen kann es zweckmäßiger sein, den Leuchtschirm nur zu Beobachtungen zu benutzen und während der Beobachtung die interessanten Stellen des Bildes mit einem kleinen, vor dem Leuchtschirm verschobenen Auffänger abzutasten. In bezug auf das geometrische Auflösungsvermögen entnimmt man den Bildern, daß, je nach dem Kontrast, Objekteinzelheiten mit einem gegenseitigen Abstand von 0,5 bis 1 mm noch unterscheidbar sind. Bei Strömungen entlang der Leuchtschirmfläche wurden von Leuchtschirmkörnern ausgehende „Stromfäden“ beobachtet, die weniger als 0,1 mm breit waren.

Es bestehen keine Schwierigkeiten, die zur Auswertung der Bilder benötigten Trübungsfunktionen noch für weitere Bereiche der Gasdichte zu bestimmen, so daß dieses Verfahren Messungen und Beobachtungen bei Luft etwa im Druckbereich von 30 Torr bis 10^{-3} Torr erlaubt, der bisher schwer oder gar nicht zugänglich war.

Diese Arbeit entstand auf Anregung meines verehrten Lehrers, Herrn Prof. Dr. E. Schopper. Für sein stetes, förderndes Interesse bin ich ihm zu großem Dank verpflichtet. Ebenso verdanke ich den Herren A. E. Grün und S. Magun manchen guten Rat, Meister Hildebrandt wertvolle Werkstattarbeit. Die Untersuchung wurde durch Mittel der Deutschen Forschungsgemeinschaft in dankenswerter Weise wesentlich unterstützt.

Hechingen, Hochspannungslaboratorium, Abt. des Max-Planck-Instituts für Physik der Stratosphäre.

Stuttgart, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Bei der Redaktion eingegangen am 22. Juli 1953.)

Zweistrahlintervenzen: Über Interferenzprinzipien und den Ort der Interferenzerscheinung

Von Günter Schulz

(Mit 6 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Es werden zwei Prinzipien, deren Anwendung die räumliche Struktur (insbesondere den Ort) von Interferenzerscheinungen zu erkennen gestattet, miteinander verglichen. Dabei wird das „Prinzip der übereinstimmenden Ordnungen“ formuliert. Durch seine Anwendung wird der Ort der Interferenzerscheinung bestimmt, die durch einen einfachen Keil bei geringer Ausdehnung der Lichtquelle erzeugt wird.

1. Die räumliche Struktur von Interferenzerscheinungen

Bei Zweistrahlintervenzen interferieren zwei Teile eines Strahlenbündels von Licht (oder einer anderen entsprechenden Strahlung) miteinander. Die räumliche Struktur der Interferenzerscheinung (d. h. der Raumbereich, in dem sie auftritt, ihr Kontrast usw.) ist durch die auf den Maxwell'schen Gleichungen beruhende Wellentheorie bestimmt. Bei einem praktisch vorliegenden Interferenzproblem jedoch ist es oft viel zu umständlich und auch gar nicht erforderlich, die Lösung der Wellengleichungen zu bestimmen. Man hilft sich vielfach durch Näherungslösungen, indem man von gewissen einleuchtend erscheinenden Grundvorstellungen ausgeht und diese anwendet. Diese Grundvorstellungen kreisen vielfach um ein Prinzip, welches hier „Prinzip der Strahlen gleicher Richtung“ genannt ist.

2. Das Prinzip der Strahlen gleicher Richtung

Dieses Prinzip sieht weitgehend von der Wellennatur des Lichtes ab und arbeitet mit Lichtstrahlen, entstammt also im wesentlichen der geometrischen Optik. Es ist, in verschiedenen Formulierungen, oder auch durch Zeichnungen veranschaulicht, an vielen Stellen der Literatur zu finden. Röntsch¹⁾ spricht es in der Form aus: „Der Ort der Interferenzerscheinung liegt stets dort, wo sich die Strahlen wieder kreuzen, die von demselben Punkt der Teilungsplatte . . . ausgehen“. Gemeint ist mit diesem Prinzip eine Konstruktion nach Abb. 1, wie sie auch bei Pohl²⁾ zu finden ist. Kinder³⁾ spricht dieses Prinzip in der Form aus: „Damit an einem Ort P scharfe Interferenzen der Wellenlänge λ mit der

¹⁾ Feinmechanik und Präzision, 52, H. 7/12, 2 (1944).

²⁾ Pohl, Einführung in die Optik, S. 78 (1948).

³⁾ Optik I, 417—418 (1946.)

Büschelöffnung ω beobachtbar sind, ist notwendig und hinreichend, daß sich in P homologe Strahlen⁴⁾ schneiden... und daß der Gangunterschied der homologen Strahlen innerhalb der ganzen Büschelöffnung ω sich um höchstens $\lambda/4$ ändert⁵⁾. Ebenfalls angewendet ist dieses Prinzip in Müller-Pouillet's Lehrbuch der

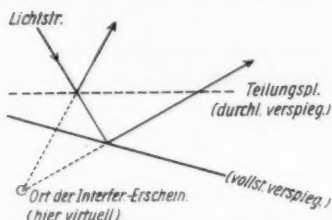


Abb. 1. Auffindung des Ortes der Interferenzerscheinung nach dem Prinzip der Strahlen gleicher Richtung

Physik⁶⁾, desgleichen bei Hansen⁶⁾. Seine allgemeine Gültigkeit ist anscheinend nirgends bewiesen und wird wohl als unmittelbar einleuchtend angesehen, obgleich sie das keinesfalls ist; denn es ist durchaus nicht unmittelbar einleuchtend, daß nur am Schnittpunkt derjenigen Strahlen Interferenzen entstehen sollen, die vor ihrer Teilung die gleiche Richtung hatten. Es sendet ja ein „Lichtpunkt“ (Emissionszentrum) innerhalb eines recht großen räumlichen Winkels kohärente Wellenfronten aus, und grundsätzlich interferieren

dabei auch solche Strahlen miteinander, die den Lichtpunkt in verschiedenen Richtungen verlassen.

Im Gegensatz hierzu wird nun im folgenden ein anderes Prinzip formuliert und angewendet, das „Prinzip der übereinstimmenden Ordnungen“, dessen Gültigkeit unmittelbar einleuchtet, und das oft sehr bequem angewendet werden kann.

3. Das Prinzip der übereinstimmenden Ordnungen

Dieses Prinzip geht von folgenden Grundvorstellungen und Voraussetzungen aus:

Die Lichtquelle besteht aus unendlich vielen, in ihrer Phase voneinander unabhängigen Lichtpunkten, welche einen gewissen Raumbereich dicht besetzen und Kugelwellen aussenden.

Das die Lichtquelle abbildende optische System (die Abbildung wird als aberrationsfrei angenommen) erzeugt infolge ein-facher Strahlenaufteilung zwei miteinander kohärente Bilder von der Lichtquelle, d. h. von jedem ihrer Lichtpunkte. Die beiden Bilder eines Lichtpunktes bilden ein „kohärentes Punktpaar“. Es wird dann von der Lichtquelle und dem abbildenden optischen System gänzlich abgesehen, und es werden nur noch die von den einzelnen Lichtpunktbildern ausgehenden und (durch die Apertur des abbildenden Systems begrenzten) Kugelwellen betrachtet, welche von den beiden Punkten eines kohärenten Punktpaares mit zeitlich gleicher Phase ausgesandt werden⁷⁾. Die erwähnte zeitliche Phasengleichheit setzt voraus, daß der Unterschied zwischen der Phase eines Lichtpunktes und der seines einen Bildes als ebenso groß betrachtet werden kann wie der entsprechende Unterschied zu der Phase seines anderen Bildes.

Die Beugung des Lichtes an Blendenrändern bleibt unberücksichtigt.

⁴⁾ „Homologe Strahlen“ sind solche, die vor ihrer Teilung die gleiche Richtung hatten und vom gleichen Punkt der Lichtquelle ausgegangen sind.

⁵⁾ Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik, 11. Auflage, 2. Band, 1. Teil, Seite 716—717 (1926).

⁶⁾ Hansen, Z. techn. Physik 12, 436 (1931).

⁷⁾ Diese Vorstellungen bilden eine Verallgemeinerung derjenigen, die üblicherweise zur Erklärung des Fresnelschen Spiegelversuchs herangezogen werden.

Nun besteht in jedem Punkt des Raumes in bezug auf jedes kohärente Punktpaar ein bestimmter Gangunterschied g und damit bei bestimmter Wellenlänge λ auch eine bestimmte „zugehörige“ Ordnung $m = g/\lambda$. —

Hierauf läßt sich das erwähnte Prinzip formulieren:

„In einem Punkt des Raumes entsteht genau dann eine Interferenzerscheinung, wenn dort die Gesamtheit aller „zugehörigen“ Ordnungen hinreichend übereinstimmt. Die dort tatsächlich zur Beobachtung gelangende Ordnung ist ein gewisser Mittelwert aller dieser Ordnungen.“ —

Es folgt eine Anwendung dieses Prinzips.

4. Über den Ort der Interferenzerscheinung bei geringer Ausdehnung der Lichtquelle

Die einfachste Interferenzerscheinung ist diejenige, bei der die beiden miteinander kohärenten Lichtquellenbilder deckungsgleich sind^{*)}, d. h. bei der diese Bilder durch eine orthogonale Transformation eines von ihnen, welche aus Drehung und Parallelverschiebung besteht, miteinander zur Deckung gebracht werden könnten. Die Form dieser Transformation ist natürlich nur durch das die Lichtquelle abbildende optische System bestimmt. Im folgenden wird der Fall der reinen Drehung (ohne Parallelverschiebung) behandelt; die Drehachse sei c , der Drehwinkel 2ϑ . Eine solche reine Drehung liegt z. B. vor beim Fresnelschen Spiegelversuch (c ist die Schnittgerade der beiden Spiegelebenen, ϑ ist der Winkel zwischen ihnen) und bei den Interferenzen am einfachen Luftkeil (c ist die Keilkante, ϑ der Keilwinkel). Dabei darf die Lichtquelle auch noch in beliebiger Weise vor der Strahlenteilung abgebildet sein, desgleichen auch nach der Strahlenteilung, sofern nur die entsprechende Transformation zwischen den beiden miteinander kohärenten Lichtquellenbildern orthogonal ist und als reine Drehung aufgefaßt werden kann.

Interferenzen sind nun zunächst am sichersten dann zu erwarten, wenn die Lichtquelle, d. h. genauer ihre Bilder, eine geringe räumliche Ausdehnung haben. Dies soll im folgenden vorausgesetzt werden. —

Zur Einführung wird zunächst das entsprechende Problem im Zweidimensionalen behandelt (siehe Abb. 2). L' und L'' sind die Mittelpunkte der beiden miteinander kohärenten Lichtquellenbilder und bilden gleichzeitig ein kohärentes Punktpaar; M' und M'' — in der geringen Entfernung d_0 von L' bzw. L'' ($d_0 \leq d_{00}$, d_{00} = Maximalentfernung) — bilden ein beliebiges kohärentes Punktpaar. Die beiden miteinander kohärenten Lichtquellenbilder könnten miteinander zur

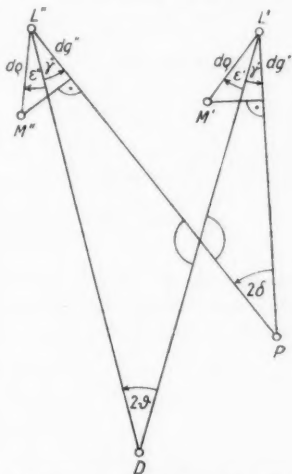


Abb. 2. Zur Auffindung des Ortes der Interferenzerscheinung, zweidimensionales Problem

^{*)} Auf diesen Fall lassen sich übrigens auch sehr viele andere Fälle zurückführen, bei denen diese Bedingung nicht erfüllt ist.

Deckung gebracht werden durch Drehung des einen von ihnen um D um den Drehwinkel 2ϑ ($0 < 2\vartheta < \pi$). Daraus folgt auch, daß in Abb. 2 die beiden Winkel ε' und ε'' einander gleich sind:

$$\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon.$$

P ist ein beliebiger Punkt der Ebene. In P besteht in bezug auf das kohärente Punktpaar $L' L''$ der Gangunterschied

$$g_a = |\overline{L' P} - \overline{L'' P}|,$$

wenn die Lichtrichtungen $L' \rightarrow P$ und $L'' \rightarrow P$ oder $P \rightarrow L'$ und $P \rightarrow L''$ sind (Fall a); sind die Lichtrichtungen dagegen $P \rightarrow L'$ und $L'' \rightarrow P$ oder $L' \rightarrow P$ und $P \rightarrow L''$ (Fall b), beträgt dieser Gangunterschied:

$$g_b = \overline{L' P} + \overline{L'' P}.$$

In P besteht in bezug auf das kohärente Punktpaar $M' M''$ der Gangunterschied (das obere Vorzeichen im Falle a, das untere im Falle b):

$$g_{a,b} + dg_{a,b} = |\overline{L' P} \mp \overline{L'' P} - dg' \pm dg''|.$$

Die zugehörige Ordnung ist:

$$m_{a,b} + dm_{a,b} = \frac{|\overline{L' P} \mp \overline{L'' P} - dg' \pm dg''|}{\lambda}.$$

Nach dem Prinzip der übereinstimmenden Ordnungen entsteht nun in P eine Interferenzerscheinung, wenn

$$\frac{|dg' \mp dg''|}{\lambda} \leq \sigma \text{ für alle } dq \leq dq_0 \text{ und alle } 0 \leq \varepsilon < 2\pi; \quad (1)$$

wie groß man $\sigma > 0$ anzusetzen hat, hängt von den Anforderungen an den Kontrast der Interferenzerscheinung ab⁹⁾; z. B. könnte man $\sigma = 1/10$ wählen.

Aus Abb. 2 folgt weiter:

$$dg' = dq \cos(\varepsilon + \gamma'),$$

$$dg'' = dq \cos(\varepsilon + \gamma''),$$

$$\gamma'' + 2\vartheta = \gamma' + 2\delta.$$

Unter Berücksichtigung dieser letzten drei Gleichungen lautet die Bedingung (1):

$$|\cos(\varepsilon + \gamma') \mp \cos(\varepsilon + \gamma' + 2\delta - 2\vartheta)| \leq \frac{\sigma \lambda}{dq};$$

$$(\text{Fall a:}) \quad |2 \sin(\varepsilon + \gamma' + \vartheta - \delta) \sin(\vartheta - \delta)| \leq \frac{\sigma \lambda}{dq} \text{ bzw.}$$

$$(\text{Fall b:}) \quad |2 \cos(\varepsilon + \gamma' + \vartheta - \delta) \cos(\vartheta - \delta)| \leq \frac{\sigma \lambda}{dq}.$$

Diese Bedingung soll für alle $dq \leq dq_0$ und für alle ε erfüllt sein (also auch für diejenigen ε , bei denen $|\sin(\varepsilon + \gamma' + \vartheta - \delta)|$ bzw. $|\cos(\varepsilon + \gamma' + \vartheta - \delta)|$ das Maxi-

⁹⁾ Von der Abhängigkeit des Kontrastes der Interferenzerscheinung von der Größe der Amplituden der beiden interferierenden Wellen am Interferenzort wird der Einfachheit halber abgesehen; d. h. es wird σ als ortonunabhängig angenommen.

mum 1 erreicht); also muß $\vartheta - \delta$ so beschaffen sein, daß:

$$\text{a) } 2 |\sin(\vartheta - \delta)| \leq \frac{\sigma \lambda}{d_{00}}^{10} \quad \text{b) } 2 |\cos(\vartheta - \delta)| \leq \frac{\sigma \lambda}{d_{00}}. \quad (2)$$

Diese Bedingung (2) ist am besten, d. h. für jedes σ , erfüllt für

$$|2\vartheta - 2\delta| = 0 \quad \text{bzw.} \quad = \pi,$$

d. h. auf dem Kreis durch D , L' und L'' . Im übrigen ist sie erfüllt auf der Fläche, welche von zwei Kreisen begrenzt wird, die ebenfalls durch L' und L'' hindurchgehen und, je nach der Größe von σ , einen mehr oder weniger großen Abstand von D haben; siehe Abb. 3. In der Mitte des schraffierten Bereiches sind die größten Kontraste der Interferenzerscheinung zu erwarten, nach den Rändern zu eine Abnahme, der absolut größte Kontrast im Punkt D . Außerhalb des schraffierten Bereiches ist keine Interferenzerscheinung mehr zu erwarten¹²⁾.

Zur Veranschaulichung ein Zahlenbeispiel: Durchmesser des Kreises durch L' , L'' und $D = 10$ cm, $\sphericalangle L' DL'' = 2\vartheta = 2^\circ$, „Durchmesser“ der Lichtquellenbilder $2d_{00} = 0,2$ mm, $\lambda = 0,5 \mu$, $\sigma = \frac{1}{5}$. Die eingeklammerte Strecke bei D ist dann etwa 6 mm groß. —

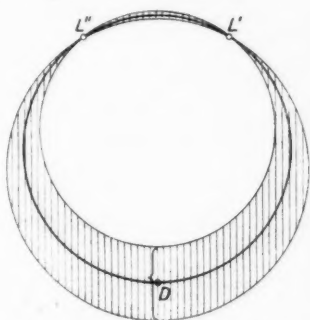


Abb. 3. Bereich, in dem eine Interferenzerscheinung entsteht¹¹⁾, zweidimensionales Problem

Nunmehr wird das Problem im Dreidimensionalen behandelt (siehe Abb. 4). L' und L'' sind wieder die Mittelpunkte der beiden miteinander kohärenten Lichtquellenbilder und bilden ein kohärentes Punktpaar, während M' und M'' ein beliebiges kohärentes Punktpaar sind und die geringe (räumliche) Entfernung $d_0 \leq d_{00}$ von L' bzw. L'' haben. Die beiden miteinander kohärenten Lichtquellenbilder könnten miteinander zur Deckung gebracht werden durch Drehung des einen von ihnen um die Drehachse c um den Drehwinkel 2ϑ ($0 < 2\vartheta < \pi$). E ist die Ebene durch L' und $L'' \perp c$. Ihr Schnittpunkt mit c ist der Punkt D . P ist ein beliebiger Punkt des Raumes, und es soll untersucht werden, ob in P eine Interferenzerscheinung entsteht. Der Fußpunkt von P in der Ebene E ist der Punkt P_0 . Ferner sollen folgende Winkelbezeichnungen gelten:

$$\sphericalangle L' P_0 L'' = 2\vartheta,$$

$$\sphericalangle P_0 L' P = 2\Phi' \left(-\frac{\pi}{2} < 2\Phi' < \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\sphericalangle P_0 L'' P = 2\Phi'' \left(-\frac{\pi}{2} < 2\Phi'' < \frac{\pi}{2} \right).$$

¹⁰⁾ Vgl. die Kohärenzbedingung bei Pohl, Einführung in die Optik, Seite 67 (1948).

¹¹⁾ Der dargestellte Bereich ist in jedem praktisch vorliegenden Falle natürlich noch durch die jeweils vorliegenden Blendenbilder entsprechend begrenzt zu denken (das gilt auch für den weiter unten behandelten dreidimensionalen Fall).

¹²⁾ Der uninteressante Fall, daß $\frac{\sigma \lambda}{d_{00}}$ so groß ist, daß überall Interferenzen entstehen, soll hier und im folgenden außer Betracht bleiben.

Legt man nun um L' die Einheitskugel, projiziert M' und P darauf, verschiebt die Kugel dann parallel nach L'' , projiziert M'' und P darauf und stellt die (1) entsprechende Bedingung auf, so erhält man folgendes Ergebnis: Diese eben erwähnte Interferenzbedingung ist am besten, d. h. auch für $\sigma = 0$, auf dem Kreis k durch

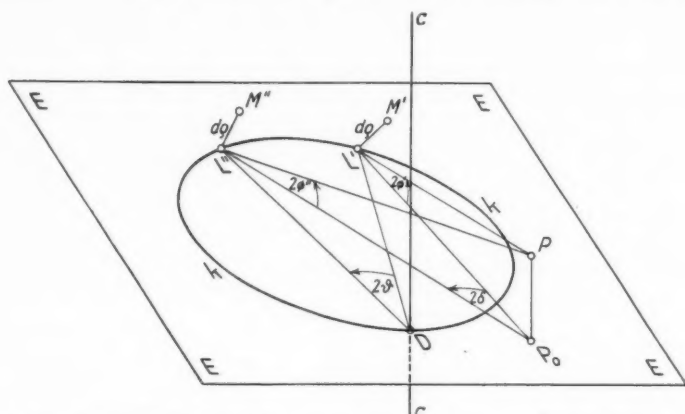


Abb. 4. Zur Auffindung des Ortes der Interferenzerscheinung, dreidimensionales Problem

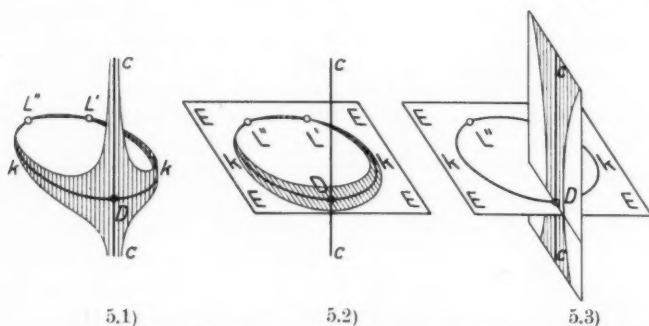


Abb. 5. Raumbereich R , in dem eine Interferenzerscheinung entsteht. 5.1) Schnitt von R mit dem durch k gehenden Kreiszylinder. 5.2) Schnitt von R mit der Ebene E . 5.3) Schnitt von R in der Umgebung von c mit der Mittelebene von $L' L''$. Die Schnittflächen sind schraffiert.

D , L' und L'' und auf der Drehachse c erfüllt. Im übrigen ist diese Bedingung erfüllt in einem gewissen Raumbereich R in mehr oder weniger weiter Umgebung von k und c . Der Schnitt von R mit dem durch k gehenden Kreiszylinder in der Umgebung von k und c ist in Abb. 5.1 durch Schraffieren qualitativ dargestellt, der Schnitt von R mit der Ebene E in Abb. 5.2 und der Schnitt von R in der Umgebung von c mit der Mittelebene von $L' L''$ in Abb. 5.3. Man erkennt, entsprechend zum zweidimensionalen Fall (Abb. 3), daß in der Umgebung von D ein verhältnis-

mäßig großer Kontrast der Interferenzerscheinung zu erwarten ist und eine Abnahme des Kontrastes in der Umgebung von k mit zunehmender Entfernung von D bis nach L' bzw. L'' hin, zwischen L' und L'' dagegen wieder eine geringe Zunahme; in der Umgebung von c tritt mit zunehmender Entfernung von D eine wachsende „Verflachung“ des Bereiches R ein. — Quantitativ ist die in Abb. 5.1 schraffierte Fläche (also der Schnitt von R mit dem durch k gehenden Kreiszylinder) definiert durch die Beziehung (3), die in Abb. 5.2 schraffierte Fläche durch (4) und die in Abb. 5.3 schraffierte Fläche durch (5); Fall a entspricht dem Bereich zwischen L' und L'' , welcher D enthält, Fall b dem, welcher D nicht enthält¹³⁾:

$$\text{a) } 2 |\sin(\Phi' - \Phi'')| \leq \frac{\sigma \lambda}{d_{00}} \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } 2 |\sin(\Phi' + \Phi'')| \leq \frac{\sigma \lambda}{d_{00}}, \quad (3)$$

$$\text{a) } 2 |\sin(\vartheta - \delta)| \leq \frac{\sigma \lambda}{d\varrho_0} \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } 2 |\cos(\vartheta - \delta)| \leq \frac{\sigma \lambda}{d\varrho_0}, \quad (4)$$

$$a) \cos(2\Phi') \cdot 2 |\sin(\vartheta - \delta)| \leq \frac{\sigma \hbar}{d\theta_0} \quad (5)$$

5. Vergleich beider Prinzipien

Nun wird am gleichen Beispiel der Ort der Interferenzerscheinung nach dem Prinzip der Strahlen gleicher Richtung bestimmt. Dazu wird angenommen (siehe Abb. 6), daß der Mittelpunkt L^* der gering ausgedehnten Lichtquelle durch den

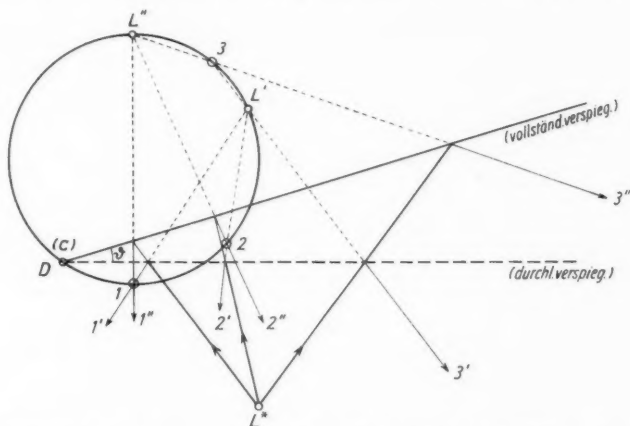


Abb. 6. Ort der Interferenzerscheinung nach dem Prinzip der Strahlen gleicher Richtung

dargestellten Keil (Keilflächen senkrecht zur Zeichenebene, Keilwinkel ϑ) in das kohärente Punktpaar $L' L''$ abgebildet wird. Die Gerade durch D senkrecht zur Zeichenebene ist die Keilkante c . Im Zuge der Anwendung des Prinzips der Strahlen gleicher Richtung sind 3 von L^* ausgehende Strahlen gezeichnet. Der erste

¹³⁾ Die Bedeutung der Fälle a und b in bezug auf die Lichtrichtungen ist die gleiche wie oben beim zweidimensionalen Problem.

wird an der durchlässig verspiegelten Fläche in die Teilstrahlen $1'$ und $1''$ zerlegt; $1'$ wird so reflektiert, als ob er von L' herkäme, $1''$ wird an der vollständig verspiegelten Fläche so reflektiert, als ob er von L'' herkäme. Beide Teilstrahlen müssen den Winkel 2ϑ miteinander bilden, woraus folgt, daß ihr Schnittpunkt, der Punkt 1, auf dem Kreise durch D , L' und L'' liegen muß. Dasselbe ergibt sich für die anderen Teilstrahlen mit ihren Schnittpunkten 2 und 3. Der Punkt 1 ist reell, 2 und 3 sind virtuell; bei 1 und 2 liegt Fall a vor, bei 3 Fall b. Alle von L^* ausgehenden Strahlen, die nicht in der Zeichenebene verlaufen, ergeben Teilstrahlen, die sich nicht schneiden; nur die von L^* nach c gelangenden Strahlen ergeben noch Teilstrahlen, die einen Punkt gemeinsam haben, nämlich ihren Ausgangspunkt auf der Geraden c selbst.

Das Prinzip der Strahlen gleicher Richtung liefert hier also als Ort der Interferenzerscheinung ebenfalls den Kreis durch D , L' und L'' und die Gerade c . Es liefert jedoch in dieser Form keine quantitativen Angaben über die Ausdehnung der Interferenzerscheinung in die Umgebung der erwähnten Linien, im Gegensatz zu dem Prinzip der übereinstimmenden Ordnungen.

Wie in späteren Arbeiten gezeigt werden wird, läßt sich das Prinzip der übereinstimmenden Ordnungen mit Erfolg auch zur Untersuchung von Interferenzerscheinungen anwenden, bei denen die Ausdehnung der Lichtquelle beliebig ist und ihr Ort nicht bekannt zu sein braucht.

Berlin-Adlershof, Institut für Optik und Feinmechanik (DAdW).

(Bei der Redaktion eingegangen am 1. Juni 1953.)

Verantwortlich

für die Schriftleitung: Prof. Dr. Friedrich Möglich, Berlin-Buch, Lindenberger Weg 74;
für den Anzeigenteil: VEB Georg Thieme, Anzeigenabteilung, Leipzig C 1, Hainstr. 17-19, Aufg. C,
Ruf 21 981. Z. Z. gilt Anzeigenpreislste Nr. 3; Verlag: Johann Ambrosius Barth, Leipzig C 1,
Salomonstr. 18 B, Fernruf: 63 105, 63 781. Veröffentlicht unter der Lizenznummer 285/1264
des Amtes für Literatur und Verlagswesen der Deutschen Demokratischen Republik
Printed in Germany

Druck: Paul Dünnhaupt, Köthen (IV/5/1) L 155/53

Die Sterne

Monatsschrift
über alle Gebiete der Himmelskunde

VERLAG JOHANN AMBROSIOUS BARTH-LEIPZIG

1954 erscheint Jahrgang 30
(12 Nummern)

Bezugspreis halbjährlich DM 7,20
zuzüglich Postgebühren

Probeheft gern kostenlos!



PHOTOZELLEN
für jeden Zweck
für Forschung
für Technik
für Tonfilm
Sonderliste Nr. 504
Sonderliste Nr. 503
Sonderliste Nr. 501
DEUTSCHE BLIMMLAMPEN-GESELLSCHAFT
**PRESSLER-
ZELLEN**
LEIPZIG 61

Verzeichnis

*lieferbarer und in Vorbereitung
befindlicher Bücher u. Zeitschriften
auf Verlangen gern kostenlos*

JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Einführung in die Kristallchemie

Von R. C. EVANS

Mitglied des St. Catharine's College und Lektor beim Department of Mineralogy and Petrology, Universität Cambridge.

Ins Deutsche übertragen von Prof. Dr. ERICH THILO, Berlin

VIII, 307 Seiten mit 113 Abbildungen im Text. 1954. Gr-8°. Leinen DM 14.-

Inhalt: Teil 1: Das Kristallgitter. Einleitung. Zwischenatomare Bindungskräfte, Quantitative Gittertheorie. Teil 2: Systematische Kristallchemie. Die metallischen Elemente. Legierungssysteme. Homöopolare Verbindungen. Ionenverbindungen; Isodesmische Strukturen. Ionenverbindungen; Mesodesmische Strukturen. Ionenverbindungen; Anisodesmische Strukturen. Wasserstoff enthaltende Ionenverbindungen. Molekülverbindungen.

Durch die Entdeckung der Interferenz der Röntgenstrahlen durch von Laue, Friedrich und Knipping im Jahre 1912, hat auch die anorganische Chemie eine neue Belebung erfahren; früher nur geahnte Zusammenhänge zwischen der Konstitution und den Eigenschaften der Verbindungen sind jetzt exakter Forschung zugänglich. Um dem immer dringender werdenden Mangel an einem allgemeinen zugänglichen Lehrbuch abzuwehren, hat Prof. Thilo das englische Werk „An Introduction to Crystal Chemistry“ übersetzt, weil es wie kein anderes geeignet ist, den Studenten der Chemie bei den Vorlesungen und beim häuslichen Studium die notwendigen Grundlagen zu vermitteln.

(Der Ladenpreis entspricht den Bestimmungen der Preisanordnung Nr. 234 v. 15. Juli 1949)

JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Höhere Mathematik für den Praktiker

Von Prof. Dr. GEORG JOOS

Direktor des Phys. Instituts der Technischen Hochschule, München
und Prof. Dr. THEODOR KALUZA

Direktor des 2. Mathematischen Instituts der Universität, Göttingen

7., verbesserte Auflage

XII, 387 Seiten mit 93 Abbildungen im Text. 1954. Gr. 8°.

DM 21,60, Ganzleinen DM 23,10

„Das anschaulich und lebendig geschriebene Buch behandelt nicht etwa Spezialverfahren der angewandten Mathematik, sondern entwickelt von Grund auf — nur unter Verzicht auf alles bloß theoretisch Wichtige — die für die Praxis bedeutsamen Teile der reinen Mathematik. Die strengen Beweisverfahren der modernen Analysis werden häufig durch anschauliche ersetzt; vor oberflächlichen Schlüssen, denen praktische Fehler entspringen können, wird jedoch stets gewarnt. Viele Übungsaufgaben mit Lösungen erleichtern dem Leser das Einarbeiten.“

W. Weber in „VDI-Zeitschrift“

Größengleichungen, Einheiten, Dimensionen

Von Dr. phil. Dr.-Ing. e. h. J. WALLOT

Honorarprofessor an der Technischen Hochschule Karlsruhe

VIII, 216 Seiten. 1953. Gr. 8°. Leinen DM 16,35

Jeder Vertreter der exakten Naturwissenschaften und jeder Techniker hat bei seiner Berufsarbeit zahlenmäßig mit physikalischen Größen zu rechnen. Dabei bereitet die Handhabung der Einheiten und Einheitssysteme erfahrungsgemäß auch dem in mathematischen und physikalischen Überlegungen nicht Ungeübten immer wieder eigentümliche Schwierigkeiten. Der Verfasser will dazu beitragen, diese zu überwinden. Er hat sich seit langem mit dem Gebiet beschäftigt, nicht nur durch das Studium der Literatur, sondern auch in zahlreichen Diskussionen und eigenen Arbeiten. Abstrakte erkenntnistheoretische oder mathematische Untersuchungen sind vernieden; im Vordergrund steht überall die Aufhellung der physikalischen Zusammenhänge und die Nutzbarmachung der ganzen Lehre für die wissenschaftliche Forschung und technische Entwicklung.

Über das quadratische Reziprozitätsgesetz im Körper der dritten Einheitswurzeln

Von Prof. Dr. HEINRICH BRANDT, Halle/Saale

Vizepräsident der Akademie

26 Seiten. 1952. 4°. DM 3,40

(Bildet: „Nova Acta Leopoldina“. Abhandlungen der Deutschen Akademie der Naturforscher [Leopoldina] zu Halle/Saale. Neue Folge, Nr. 106. Band 15)

Die allgemeinen Reziprozitätsgesetze und im besonderen das quadratische, wurden schon vielfach bearbeitet, wobei bemerkenswerte Resultate erzielt worden sind. Die Anwendung auf konkrete Fälle kann jedoch noch zu wenig befriedigen. Der Verfasser hat es deshalb unternommen, neue Zugänge zu diesem Gesetz zu finden. Aus seiner Darstellung, die etwas breiter gehalten ist, um auch Lesern, die nur einige Kenntnisse aus der elementaren Zahlentheorie mitbringen, zu gewinnen, leitet der Verfasser eine sehr einfache Formulierung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes ab, welche in genau derselben Form für alle einklassigen Zahlkörper und soweit zu übersehen ist, auch für einklassige algebraische Zahlkörper überhaupt gültig ist.

(Die Ladenpreise entsprechen den Bestimmungen der Preisanordnung Nr. 234 vom 15. Juli 1949.)

JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

n
t
n
h
n
n
n

-
g
d.
n
-
g
e

-
n
g
b
e
-
e
n
e

0
-
g
r